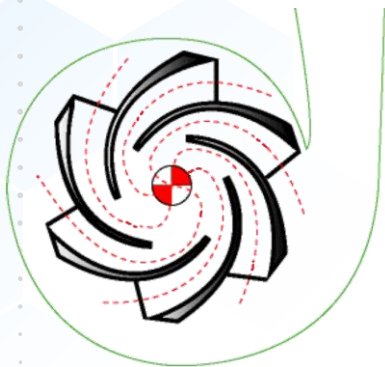


توربو ماشین ها

محمدصادق کریمی

دکتری تخصصی مهندسی مکانیک





مروری بر قوانین پایداری، مثلث سرعت‌ها، پایداری جرم و اندازه حرکت در توربومشین‌ها

۱-۲

معادله اولر در توربومشین‌ها

۲-۲

معادله پایداری انرژی، معادله انرژی برای توربومشین‌های تراکم‌ناپذیر

۳-۲

معادله انرژی برای توربومشین‌های تراکم‌پذیر، معادله انرژی در حرکت نسبی

۴-۲



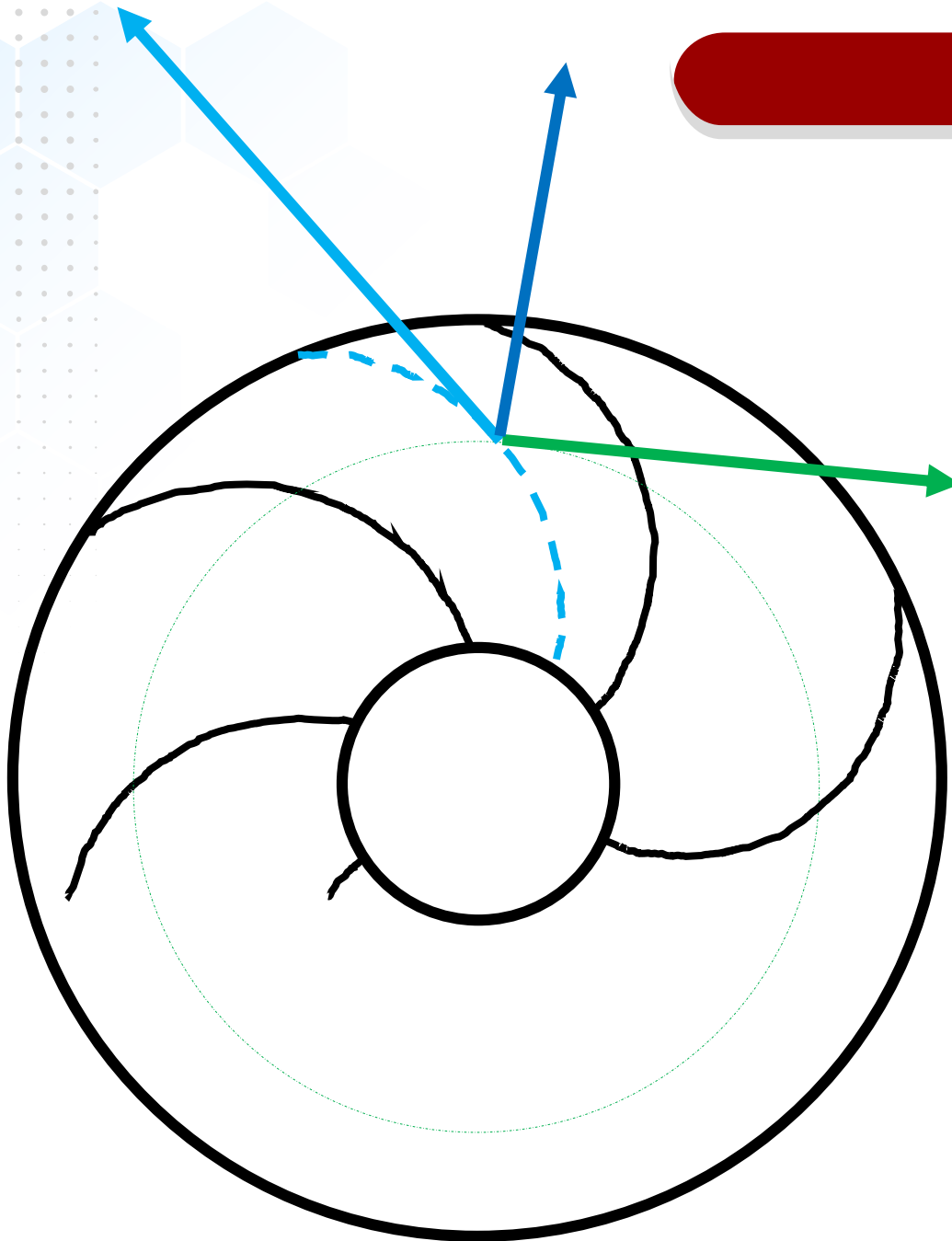
مثلت سرعت‌ها

❖ فرضیات:

- P:** نقطه‌ی فرضی به فاصله‌ی R از محور دوران
- W:** سرعت نقطه P در دستگاه نسبی مماس بر خط جریان
- ω :** سرعت زاویه‌ای چرخ
- U:** سرعت محیطی نقطه P عمود بر صفحه‌ی حاوی محور ماشین و نقطه‌ی P
- C:** سرعت مطلق المان سیال

$$U = R \omega$$

$$\vec{C} = \vec{U} + \vec{W}$$



مثلث سرعت‌ها

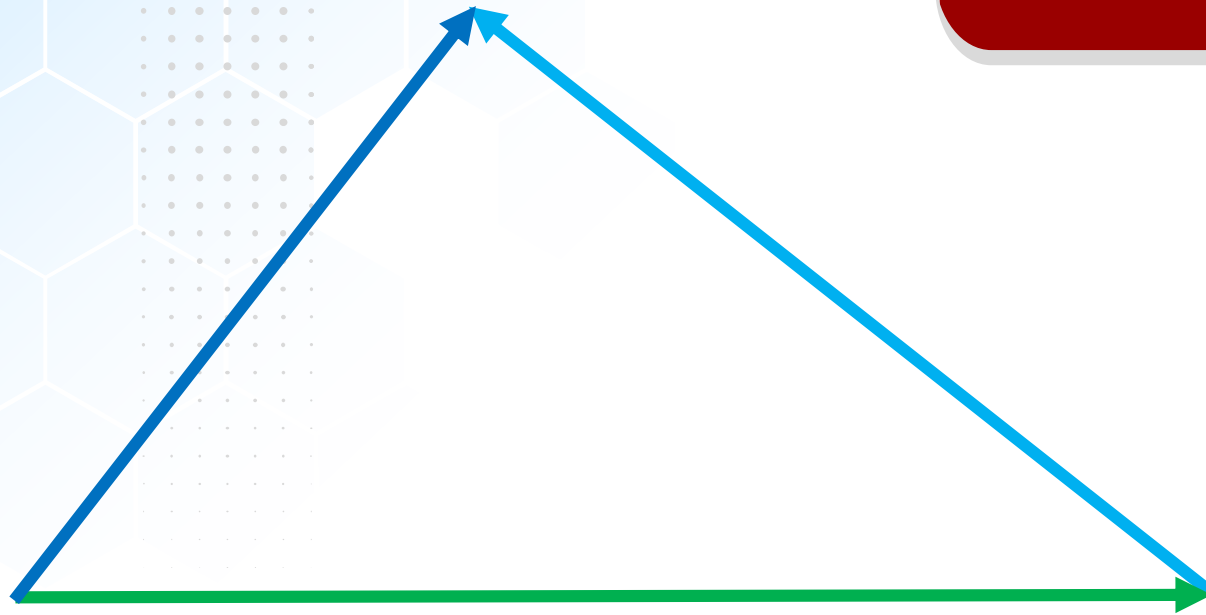
❖ قرارداد:

α : زاویه بین بردارهای $\vec{C}$ و $\vec{U}$

β : زاویه بین بردار $\vec{W}$ و جهت مخالف بردار $\vec{U}$

همواره سرعت محیطی U قاعده مثلث سرعت خواهد بود.

اندیس u : تصاویر سرعت‌های مطلق و نسبی در امتداد سرعت محیطی



$$C_u = C \cos \alpha$$

$$C_m = C \sin \alpha$$

$$W_u = W \cos \beta$$

$$W_m = W \sin \beta$$

اندیس m : مولفه‌ی عمود بر سرعت محیطی

این مولفه (ارتفاع مثلث سرعت) عمود بر سطح جریان و متناسب با دبی حجمی می‌باشد.

مولفه‌ی C_m (مولفه‌ی نصف النهاری سرعت) در ماشین‌های شعاعی با اندیس r و در ماشین‌های محوری با اندیس a مشخص می‌شود.

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \, dV + \int_{CS} \rho \, \vec{C} \cdot d\vec{A} = 0$$

❖ معادله پیوستگی برای جریان دائمی:

$$\int_{CS} \rho \, \vec{C} \cdot d\vec{A} = 0$$

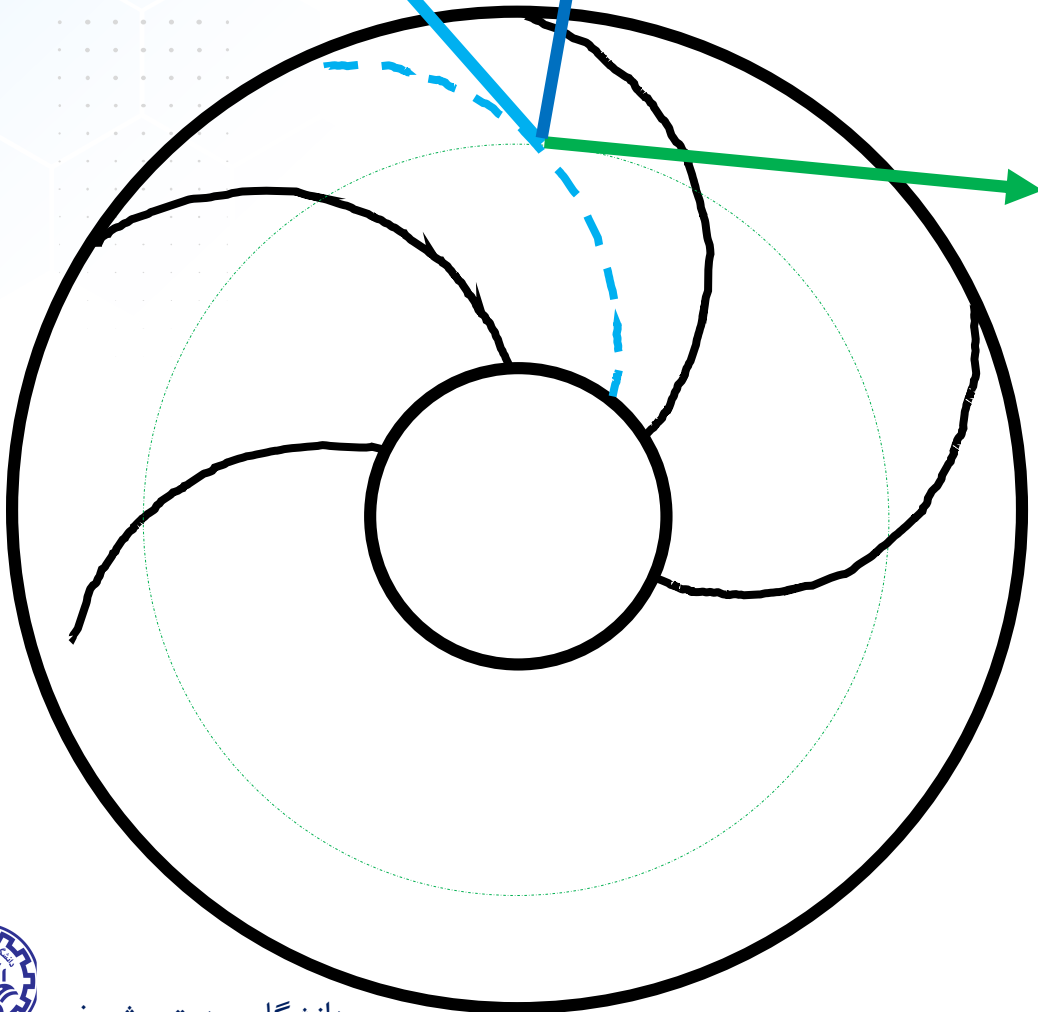
$$\dot{m} = \int_A \rho \, \vec{C} \cdot d\vec{A} = \text{cte}$$

با توجه به اینکه زاویه بین بردارهای $\vec{C}$ و $d\vec{A}$ متمم زاویه α است:

$$\dot{m} = \int_A \rho \, C \sin \alpha \, dA = \int_A \rho \, W \sin \beta \, dA$$

برای جریان تراکم‌ناپذیر می‌توان از دبی حجمی استفاده کرد:

$$Q = \int_A C \sin \alpha \, dA = \int_A W \sin \beta \, dA$$



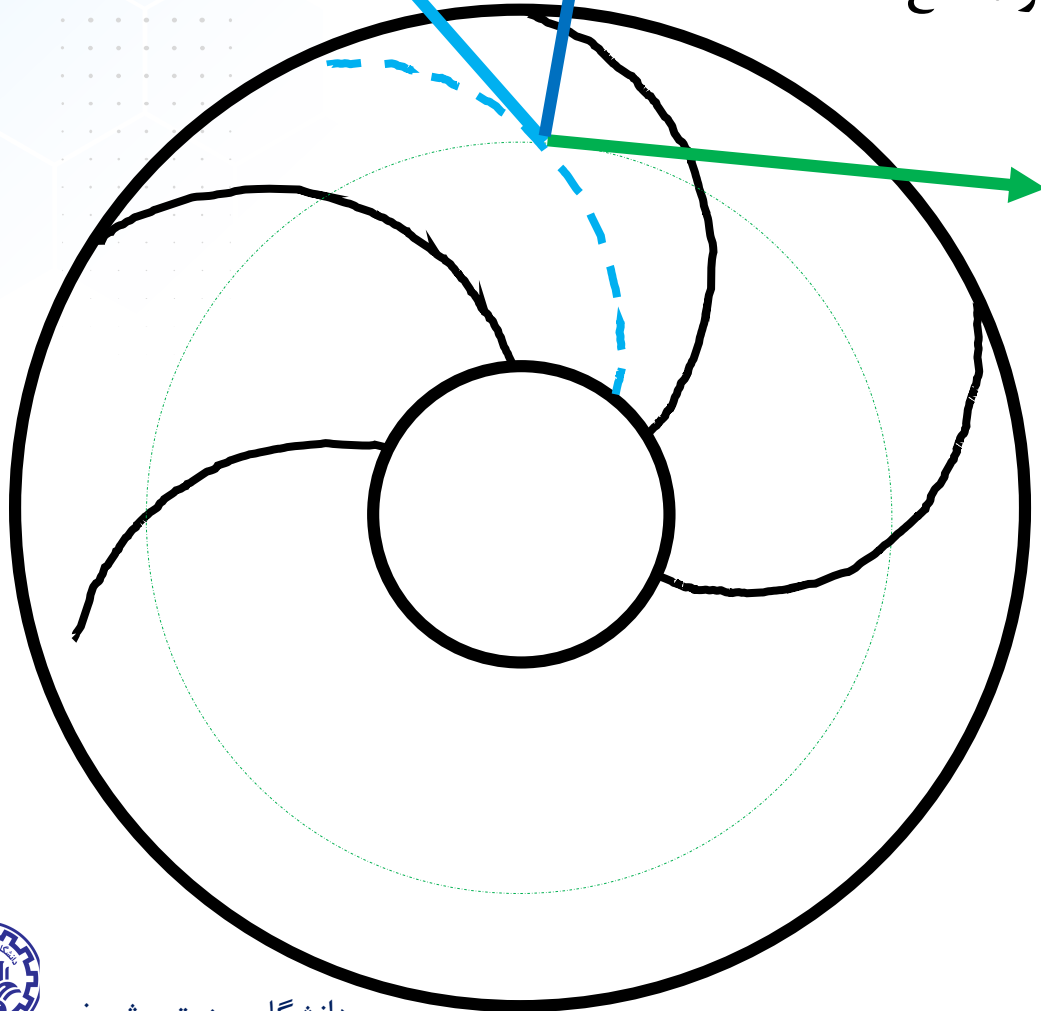
معادله پیوستگی

❖ با صرف نظر از نشتی و استفاده از سرعت های متوسط بین دو مقطع دلخواه ۱ و ۲ داریم:

$$\rho_1 C_{m1} A_1 = \rho_2 C_{m2} A_2$$

برای جریان تراکم ناپذیر:

$$C_{m1} A_1 = C_{m2} A_2$$



معادله‌ی اندازه حرکت خطی

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_S = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \vec{C} dV + \int_{CS} \vec{C} (\rho \vec{C} \cdot d\vec{A})$$

معادله‌ی بقا ممنتوم برای جریان دائمی:

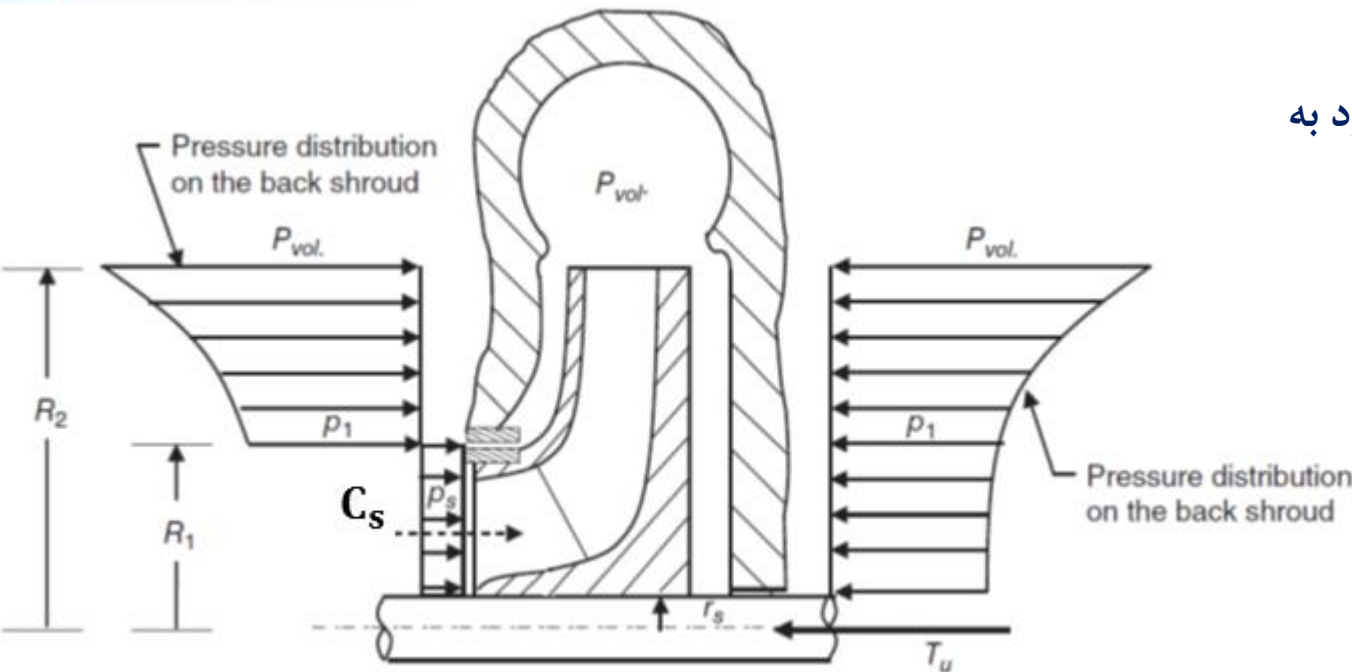
$$\vec{F} = \int_{CS} \vec{C} \rho \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

برآیند نیروهای وارد به
حجم کنترل

خالص مقدار حرکت خروجی
سیال از سطح کنترل

A_1 سطح ورودی و A_2 سطح خروجی:

$$F_x = \int_{A_2} C_{x2} (\rho_2 C_{m2} dA_2) - \int_{A_1} C_{x1} (\rho_1 C_{m1} dA_1)$$

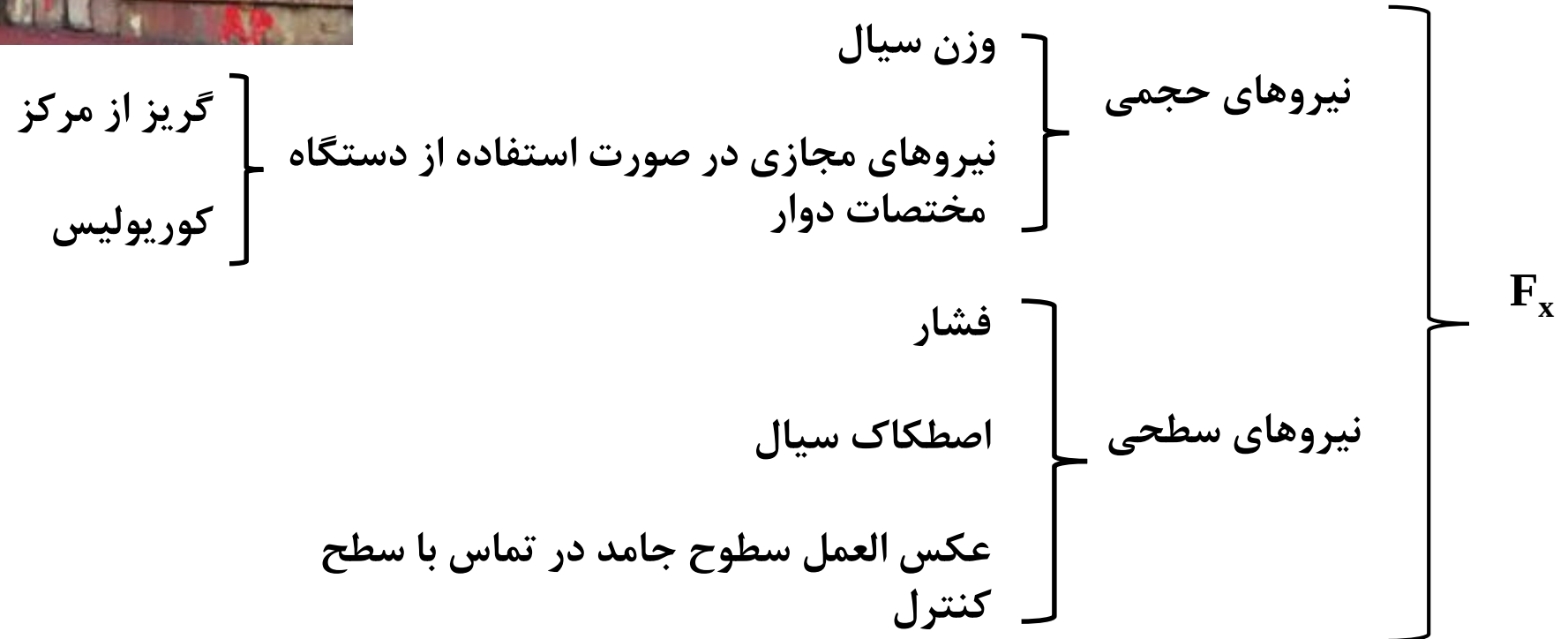




معادله‌ی اندازه حرکت خطی

برای جریان یک بعدی دائمی:

$$F_x = \dot{m} (C_{x2} - C_{x1}), \dot{m} = \rho_1 C_{m1} A_1 = \rho_2 C_{m2} A_2$$

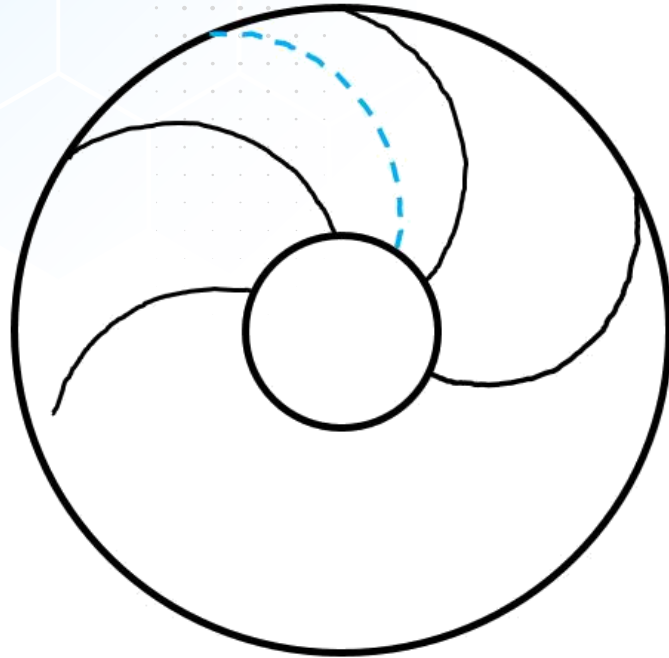


اگر x در امتداد محور باشد، F_x بیانگر عکس العمل یا تاقان‌ها در ماشین‌های ساکن و نیروی رانش در ملخ هواپیما و پروانه کشتی است.

معادله‌ی اولر

$$\vec{R} \times \vec{F}_S + \int_{CV} \vec{R} \times \vec{g} \rho dV + \vec{T}_{shaft} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \vec{R} \times \vec{C} \rho dV + \int_{CS} \vec{R} \times \vec{C} (\rho \vec{C} \cdot d\vec{A})$$

معادله‌ی لنگر مقدار حرکت برای جریان دائمی:



$$M'' = \int_{CS} R C \cos \alpha (\rho \vec{C} \cdot d\vec{A})$$

گشتاور متبادله بین
چرخ و سیال

خالص مقدار حرکت
زاویه‌ای خروجی از چرخ
در ماشین‌های توان گیر مثبت
در ماشین‌های توان ده منفی

A_1 سطح ورودی و A_2 سطح خروجی:

$$M'' = \int_{A_2} R_2 C_2 \cos \alpha_2 (\rho_2 C_{m2} dA_2) - \int_{A_1} R_1 C_1 \cos \alpha_1 (\rho_1 C_{m1} dA_1)$$

معادله اصلی اولر برای توربوماشین‌ها

معادله‌ی اولر

قدرت متبادله بین چرخ و سیال P'' :

همچنین داریم:

$$P'' = M'' \omega$$

$$E'' = \frac{P''}{\dot{m}''}$$

در توربوماشین‌های با جریان تراکم‌پذیر از قدرت بر واحد جرم سیال استفاده می‌کنیم:

$$E'' = \frac{1}{\dot{m}''} \left[\int_{A_2} U_2 C_2 \cos \alpha_2 (\rho_2 C_{m2} dA_2) - \int_{A_1} U_1 C_1 \cos \alpha_1 (\rho_1 C_{m1} dA_1) \right]$$

معادله‌ی اولر

در توربوماشین‌های با جریان تراکم‌ناپذیر از قدرت بر واحد وزن سیال استفاده می‌کنیم:

$$H'' = \frac{P''}{\dot{m}''g}$$

بنابراین:

$$H'' = \frac{1}{\dot{m}''g} \left[\int_{A_2} U_2 C_2 \cos \alpha_2 (\rho_2 C_{m2} dA_2) - \int_{A_1} U_1 C_1 \cos \alpha_1 (\rho_1 C_{m1} dA_1) \right]$$

ابعاد کمیت فوق طول بوده و H'' ارتفاع اولر نامیده می‌شود.

در پمپ‌ها: H'' ارتفاع انرژی

در توربین‌ها: H'' ارتفاع موثر

معادله‌ی اولر

معادلات گذشته برای جریان یک بعدی:

$$M'' = \dot{m}'' (R_2 C_2 \cos\alpha_2 - R_1 C_1 \cos\alpha_1)$$

$$P'' = \dot{m}'' (U_2 C_2 \cos\alpha_2 - U_1 C_1 \cos\alpha_1)$$

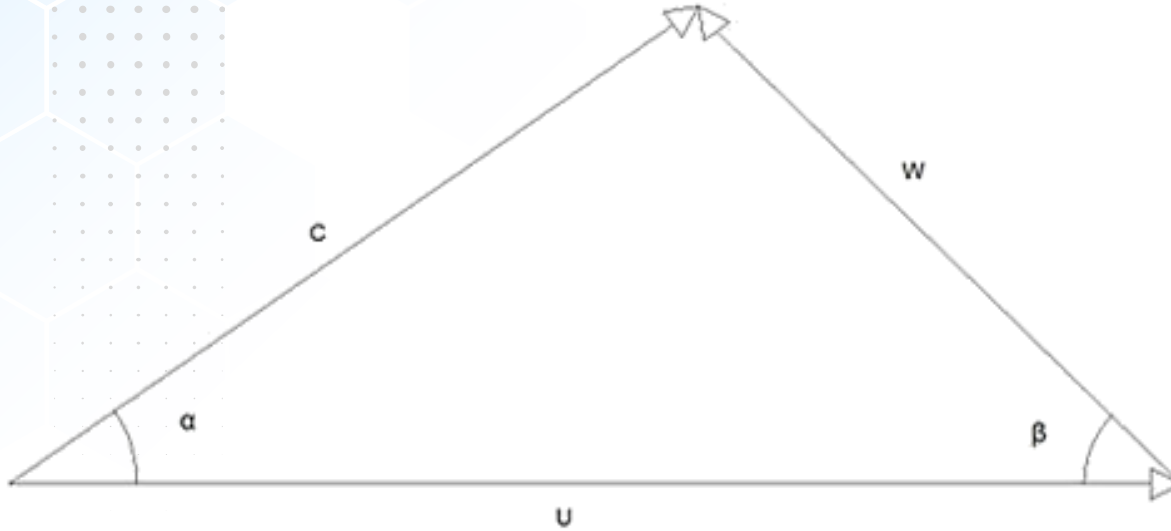
$$E'' = U_2 C_2 \cos\alpha_2 - U_1 C_1 \cos\alpha_1$$

$$H'' = \frac{1}{g} (U_2 C_2 \cos\alpha_2 - U_1 C_1 \cos\alpha_1)$$

نتیجه آن که کل تبادل انرژی ناشی از اختلاف کمیت UC_u در ورود و خروج چرخ است.

معادله‌ی اولر

با استفاده از قوانین مثلثاتی در مثلث سرعت‌ها:



با جایگذاری در معادلات قبل داریم:

$$UC \cos \alpha = \frac{1}{2}(U^2 + C^2 - W^2)$$

$$E'' = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$$

$$H'' = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g}$$

تبادل انرژی ناشی از تغییر
انرژی جنبشی سیال در چرخ

تغییر انرژی استاتیک

$$E'' = \underbrace{\frac{C_2^2 - C_1^2}{2}}_{\text{ارتفاع دینامیک}} + \underbrace{\frac{U_2^2 - U_1^2}{2} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2}}_{\text{ارتفاع پتانسیل}}$$

$$H'' = \underbrace{\frac{C_2^2 - C_1^2}{2g}}_{\text{ارتفاع دینامیک}} + \underbrace{\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g}}_{\text{ارتفاع پتانسیل}}$$

معادله‌ی اولر

در توربوماشین‌های محوری با توجه به $U_1 = U_2 = U$ داریم:

$$E'' = U (C_{u2} - C_{u1})$$

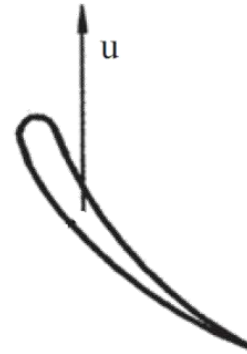
$$H'' = \frac{U}{g} (C_{u2} - C_{u1})$$

$$H'' = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g}$$

همانطور که ملاحظه می‌گردد به علت فقدان نیروی گریز از مرکز در مقایسه با چرخ‌های سانتریفیوژ، ارتفاع مانومتریک تولیدی در چرخ‌های محوری کمتر است.



مناسب برای تولید فشار کم و دبی زیاد

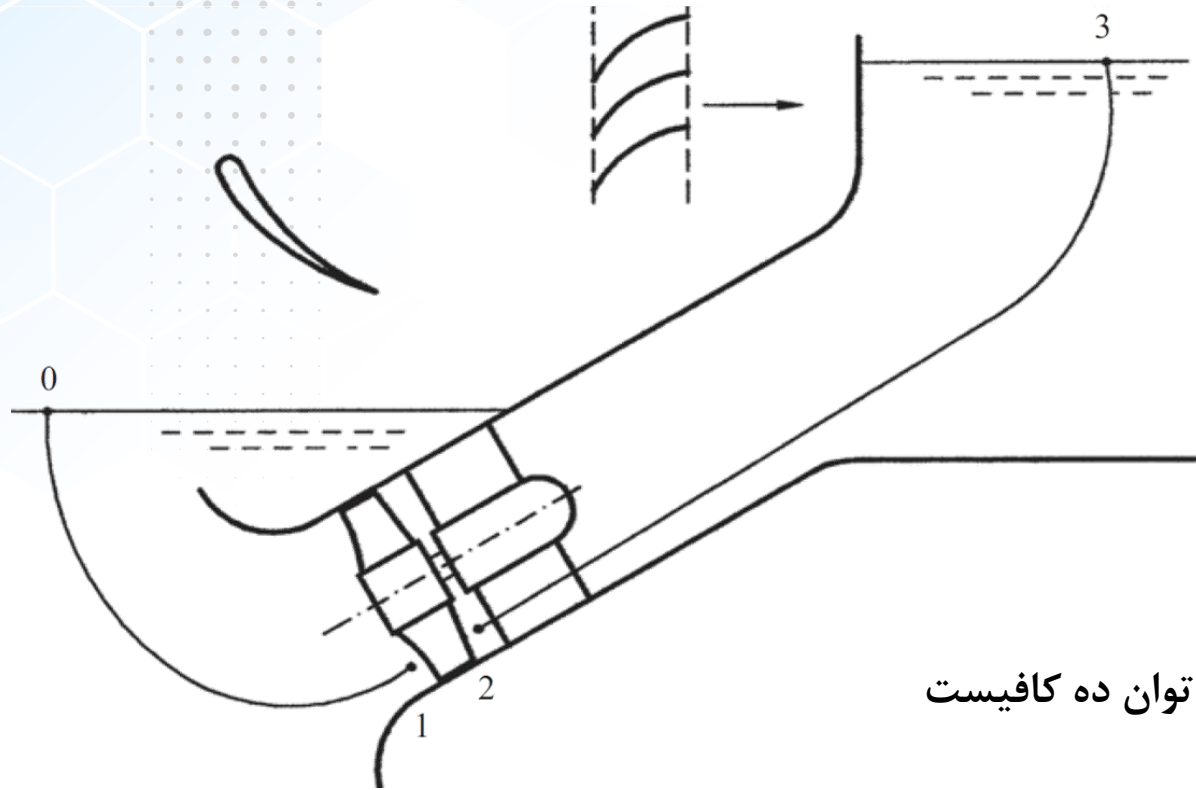


rotor



diffuser

معادله‌ی اولر



معادله اولر فقط به سرعت جریان می‌پردازد



برای جریان تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر یکسان خواهد بود.

کلیه معادلات برای ماشین‌های توانگیر بوده و برای ماشین‌های توان ده کافیست جای اندیس‌ها عوض شود.

$$E'' = U_1 C_{u1} - U_2 C_{u2}$$

$$H'' = \frac{1}{g} (U_1 C_{u1} - U_2 C_{u2})$$

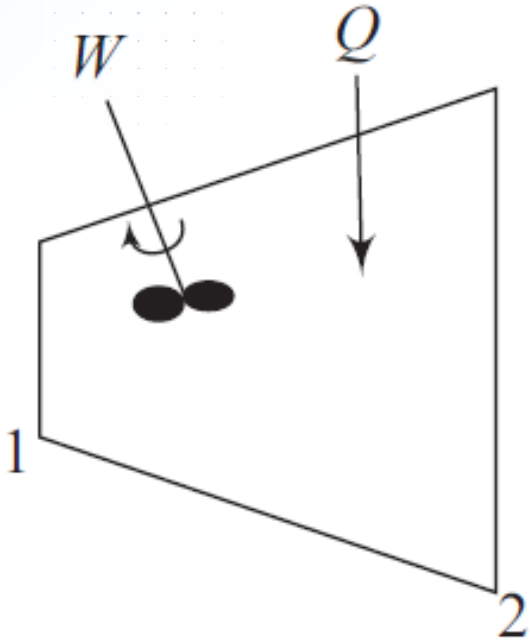
$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \left(u + \frac{C^2}{2} + gZ \right) \rho dV + \int_{CS} \left(u + pv + \frac{C^2}{2} + gZ \right) (\rho \vec{C} \cdot d\vec{A})$$

❖ قانون اول ترمودینامیک برای جریان دائمی:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \int_{CS} \left(h + \frac{C^2}{2} + gZ \right) (\rho \vec{C} \cdot d\vec{A})$$

با استفاده از اندیس ۱ برای ورودی و اندیس ۲ برای خروجی داریم:

$$\dot{Q} + \int_{A_1} \left(h_1 + \frac{C_1^2}{2} + gZ_1 \right) (\rho_1 C_{m1} dA_1) = \dot{W} + \int_{A_2} \left(h_2 + \frac{C_2^2}{2} + gZ_2 \right) (\rho_2 C_{m2} dA_2)$$



اصل بقای انرژی

❖ با فرض جریان یک بعدی در ورودی و خروجی و تقسیم طرفین به $\dot{m}$ داریم:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho_1 C_{m1} A_1 = \rho_2 C_{m2} A_2$$

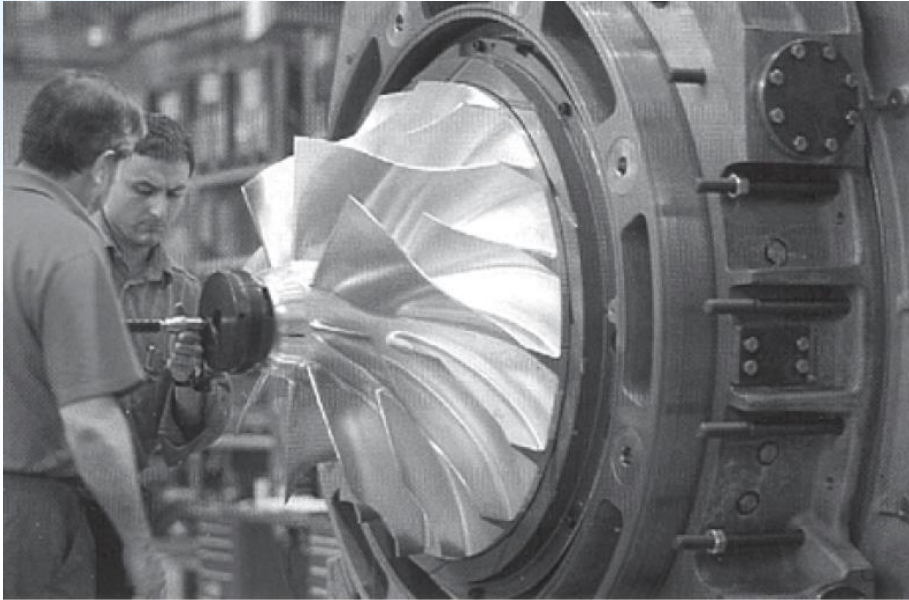
$$\frac{dQ}{dm} + \left(h_1 + \frac{C_1^2}{2} + gZ_1 \right) = \frac{dW}{dm} + \left(h_2 + \frac{C_2^2}{2} + gZ_2 \right)$$

حرارت ورودی به ماشین
بر واحد جرم سیال عبوری

کار مکانیکی خروجی از ماشین
بر واحد جرم سیال عبوری (E'')

عمومی ترین صورت اصل بقای انرژی برای کاربرد در تئوری توربوماشین ها

اصل بقای انرژی



❖ ۱- معادله‌ی انرژی برای توربوماشین‌های با جریان تراکم‌پذیر

با صرف نظر کردن از تغییر ارتفاع در این ماشین‌ها و باز نویسی معادله‌ی عمومی اصل بقای انرژی داریم:

$$-\dot{W} = \dot{Q} + \dot{m} \left[(h_2 - h_1) + \left(\frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2} \right) \right]$$

با تعریف آنتالپی سکون مطلق می‌توان نوشت:

$$-\dot{W} = \dot{Q} + \dot{m}(h_{02} - h_{01}), \quad h_0 = h + \frac{C^2}{2}$$

اصل بقای انرژی

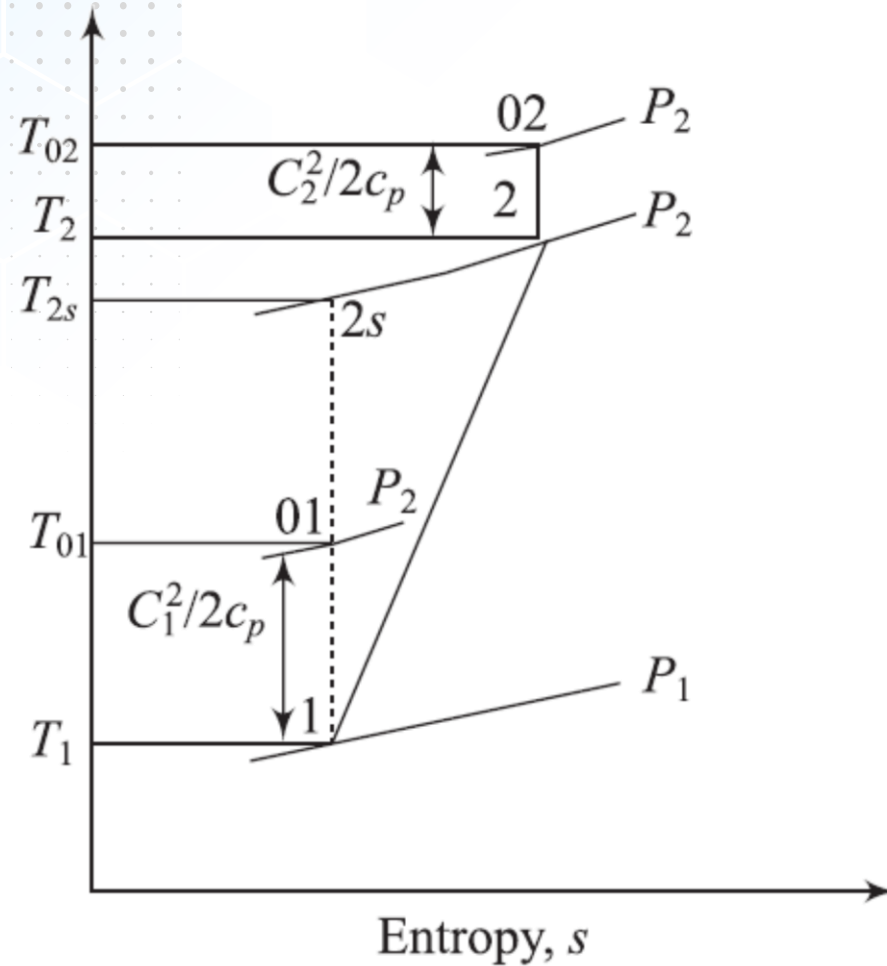
❖ ۱- معادله‌ی انرژی برای توربوماشین‌های با جریان تراکم‌پذیر

با فرض تحول آدیاباتیک در ماشین:

$$-\dot{W} = \dot{m}(h_{02} - h_{01})$$

و با فرض سیال عبوری به صورت گاز کامل:

$$-\dot{W} = \dot{m} C_p (T_{02} - T_{01})$$



اصل بقای انرژی

❖ ۲- معادله انرژی برای توربوماشین‌های با جریان تراکم‌ناپذیر

با تعریف آنتالپی به صورت:

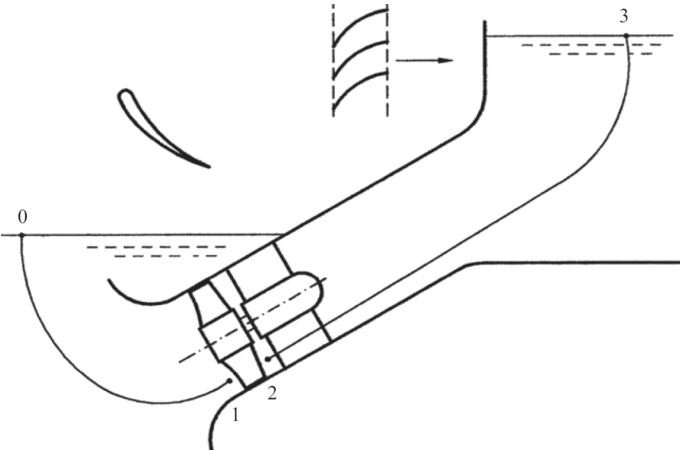
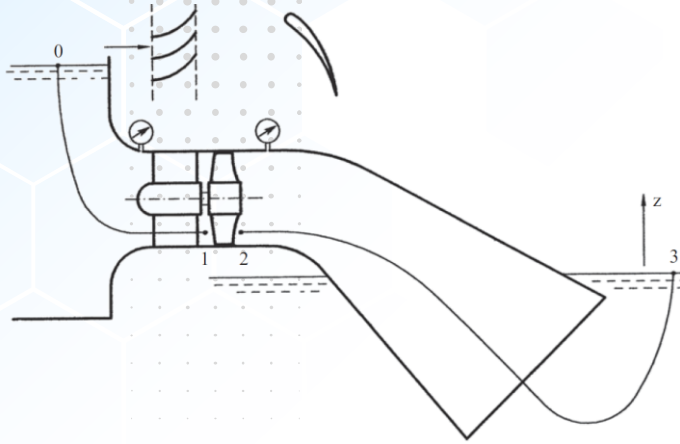
$$h = u + \frac{P}{\rho}$$

معادله عمومی اصل بقای انرژی به صورت زیر در می‌آید:

$$-\frac{dW}{dm} + \left[u_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{C_1^2}{2} + gZ_1 \right] = \frac{dQ}{dm} + \left[u_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{C_2^2}{2} + gZ_2 \right]$$

و یا:

$$-\frac{dW}{dm} = \left[\left(\frac{P_2}{\rho} - \frac{P_1}{\rho} \right) + \left(\frac{C_2^2}{2} - \frac{C_1^2}{2} \right) + g(Z_2 - Z_1) \right] + \underbrace{(u_2 - u_1) - \frac{dQ}{dm}}_{h_L}$$





❖ ۲- معادله‌ی انرژی برای توربوماشین‌های با جریان تراکم‌ناپذیر

استفاده از انرژی بر واحد وزن سیال عبوری در جریان تراکم‌ناپذیر:

$$\underbrace{-\frac{dW}{g \, dm}}_{\text{انرژی مبادله شده بر واحد وزن سیال عبوری}} = \left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma} \right) + \left(\frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} \right) + (Z_2 - Z_1) + \underbrace{\frac{h_L}{g}}_{\text{اتلاف انرژی به صورت کاهش فشار موسوم به افت فشار یا تلفات هیدرولیکی } \tau}$$

انرژی مبادله شده بر واحد
وزن سیال عبوری



ارتفاع اولر H''

اتلاف انرژی به صورت
کاهش فشار موسوم به
افت فشار یا
تلفات هیدرولیکی τ



❖ ۲- معادله انرژی برای توربو ماشین های با جریان تراکم ناپذیر در سایر قسمت های ماشین

معادله اصلاح شده برنولی برای هدایت کننده یا نازل:

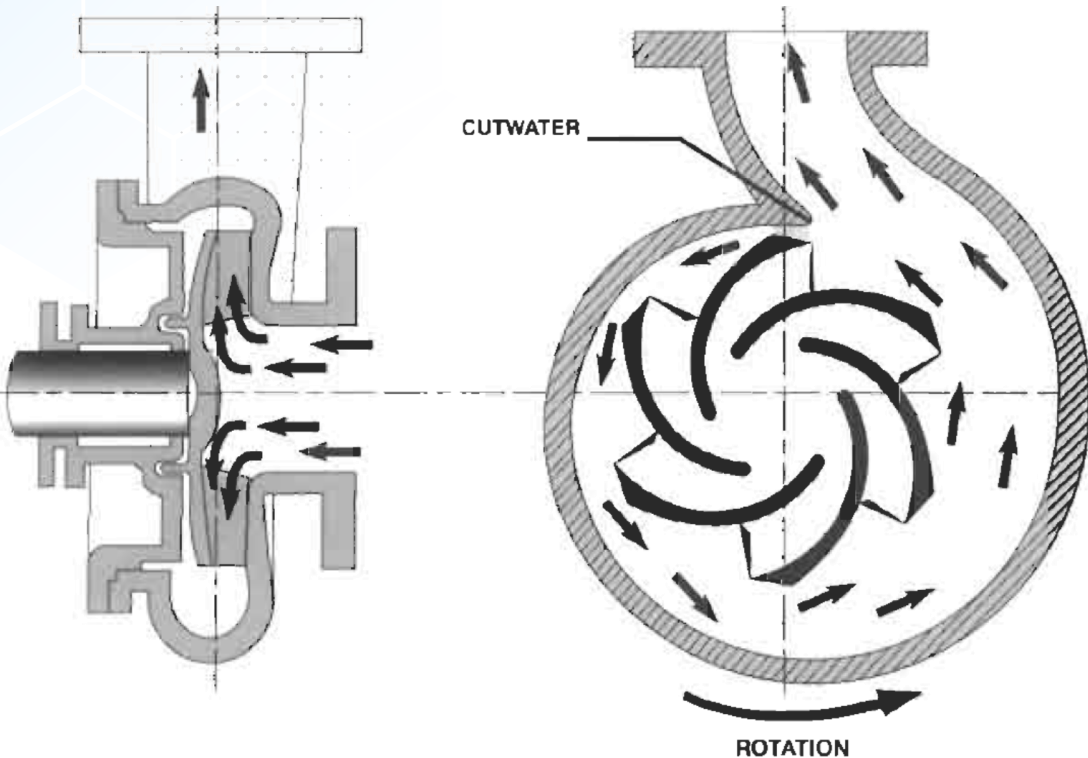
$$\frac{P_0}{\gamma} + \frac{C_0^2}{2g} + Z_0 = \frac{P_1}{\gamma} + \frac{C_1^2}{2g} + Z_1 + \tau_{0-1}$$

معادله انرژی برای چرخ:

$$H'' + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{C_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{C_2^2}{2g} + Z_2 + \tau_{1-2}$$

معادله ای اصلاح شده برنولی برای دیفیوزر و جمع کننده:

$$\frac{P_2}{\gamma} + \frac{C_2^2}{2g} + Z_2 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{C_3^2}{2g} + Z_3 + \tau_{2-3}$$



❖ ۲- معادله‌ی انرژی برای توربوماشین‌های با جریان تراکم‌ناپذیر در سایر قسمت‌های ماشین

از جمع معادلات داریم:

کلیه تلفات هیدرولیکی در تمام قسمت‌های ماشین

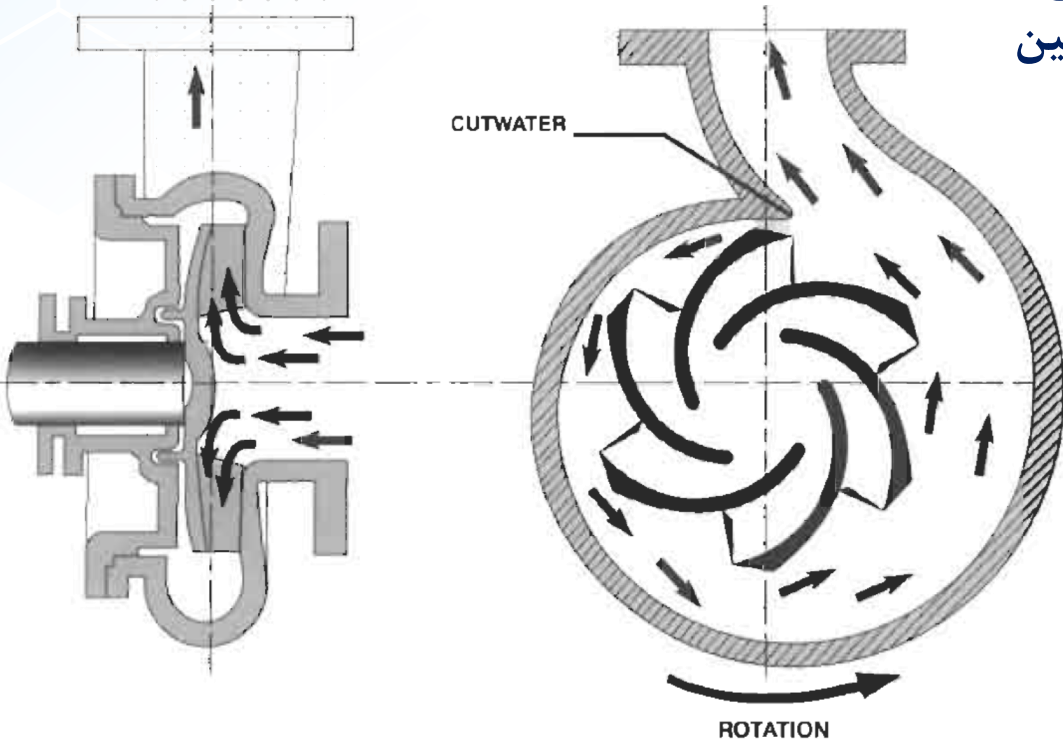
$$\tau_{0-3} = \tau_{0-1} + \tau_{1-2} + \tau_{2-3}$$

$$H'' = \left[\frac{P_3 - P_0}{\gamma} + \frac{C_3^2 - C_0^2}{2g} + (Z_3 - Z_0) \right] + \tau_{0-3}$$

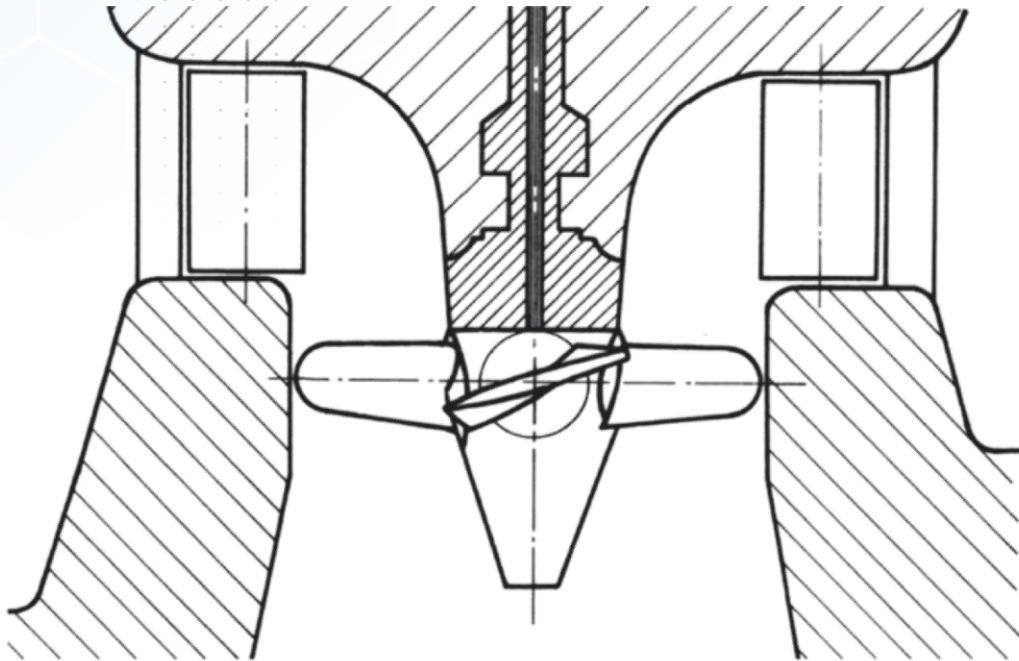


$$H'' = H + \tau_{0-3}$$

H ارتفاع مفید (در پمپ‌ها ارتفاع مانومتریک) است.



❖ ۲- معادله‌ی انرژی برای توربوماشین‌های با جریان تراکم‌ناپذیر در توربین‌های آبی



$$H'' = \frac{P_0 - P_3}{\gamma} + \frac{C_0^2 - C_3^2}{2g} + (Z_0 - Z_3) - \tau_{0-3}$$

$$H = \frac{P_0 - P_3}{\gamma} + \frac{C_0^2 - C_3^2}{2g} + (Z_0 - Z_3)$$

$$H'' = H - \tau_{0-3}$$

H ارتفاع مفید در توربین‌ها ارتفاع خالص

معادله‌ی انرژی در حرکت نسبی

❖ ۱- جریان تراکم‌پذیر

با توجه به معادله‌ی اولر به صورت:

$$E'' = U_2 C_{u2} - U_1 C_{u1}$$

و معادله‌ی انرژی به صورت:

$$E'' = h_{02} - h_{01}$$

می‌توان نوشت:

$$h_{02} - U_2 C_{u2} = h_{01} - U_1 C_{u1}$$

نتیجه می‌شود کمیت روتالپی $I = h_0 - UC_u = h + \frac{C^2}{2} - UC_u$ در حرکت نسبی داخل چرخ ثابت می‌ماند.

❖ ۱- جریان تراکم‌پذیر

با توجه به مثلث سرعت‌ها داریم:

$$UC_u = \frac{1}{2} (U^2 + C^2 - W^2)$$

با جایگذاری در معادله‌ی روتالپی خواهیم داشت:

$$I = h_0 - UC_u = h + \frac{C^2}{2} - UC_u = h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \text{cte}$$

با صرف نظر از انتقال حرارت بین دو نقطه دلخواه **a** و **b** از جریان حول چرخ دوار می‌توان نوشت:

$$h_a + \frac{W_a^2}{2} - \frac{U_a^2}{2} = h_b + \frac{W_b^2}{2} - \frac{U_b^2}{2}$$

معادله انرژی در حرکت نسبی

❖ ۲- جریان تراکم‌ناپذیر

با توجه به معادله اولر به صورت:

$$H'' = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + \frac{W_1^2 - W_2^2}{2g}$$

و معادله انرژی به صورت:

$$H'' = \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2g} + (Z_2 - Z_1) + \tau_{1-2}$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{W_1^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{W_2^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} + Z_2 + \tau_{1-2}$$

معادله برنولی در
حرکت نسبی

معادله انرژی در حرکت نسبی

❖ ۲- جریان تراکم‌ناپذیر

اگر از اختلاف ارتفاع و تلفات صرف‌نظر کنیم:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{W_1^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{W_2^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g}$$

در یک جریان اتمسفریک که $P_1 = P_2$ داریم:

$$W_1^2 - U_1^2 = W_2^2 - U_2^2$$

پُر کاربرد در توربین
های ضربه‌ای

قانون دوم ترمودینامیک

❖ بیان قانون دوم ترمودینامیک برای بیان تحول بین حالات ۱ و ۲:

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} \leq s_2 - s_1$$

حالت مساوی بیان گر برگشت پذیری سیستم است.
اصطکاک و انتقال حرارت از عوامل برگشت ناپذیری هستند.

در یک فرآیند آدیاباتیکی داریم:

$$\delta Q = 0, \quad s_2 - s_1 \geq 0$$

و اگر هم آدیاباتیکی باشد و هم برگشت پذیر:

$$s_2 = s_1 \quad \rightarrow \quad \text{فرآیند آیزنتروپیک}$$



توضیحاتی در مورد تئوری یک بعدی

❖ مهم ترین فرض در ساده سازی روابط:

- ✓ انحراف مسلم از جریان واقعی
- ✓ نیازمند ضرایب تصحیح برای نیل به مقدار حقیقی
- ✓ برای کمیت های عددی با توان اول موجود در زیر انتگرال استفاده از میانگین حسابی مناسب است. فشار، چگالی، آنتالپی سرعت عمود بر سطح و ... چنین هستند.
- ✓ استفاده از ضریب تصحیح مقدار حرکت (بوزینسک) و ضریب تصحیح انرژی جنبشی (کوریولیس) برای اصلاح سرعت در معادله ی مقدار حرکت خطی و انرژی به صورت زیر:

$$\beta = \frac{\int_A V \rho V dA}{\rho \bar{V}^2 A} \quad \alpha = \frac{\int_A \frac{V^2}{2} \rho V dA}{\rho \frac{\bar{V}^3}{2} A}$$

