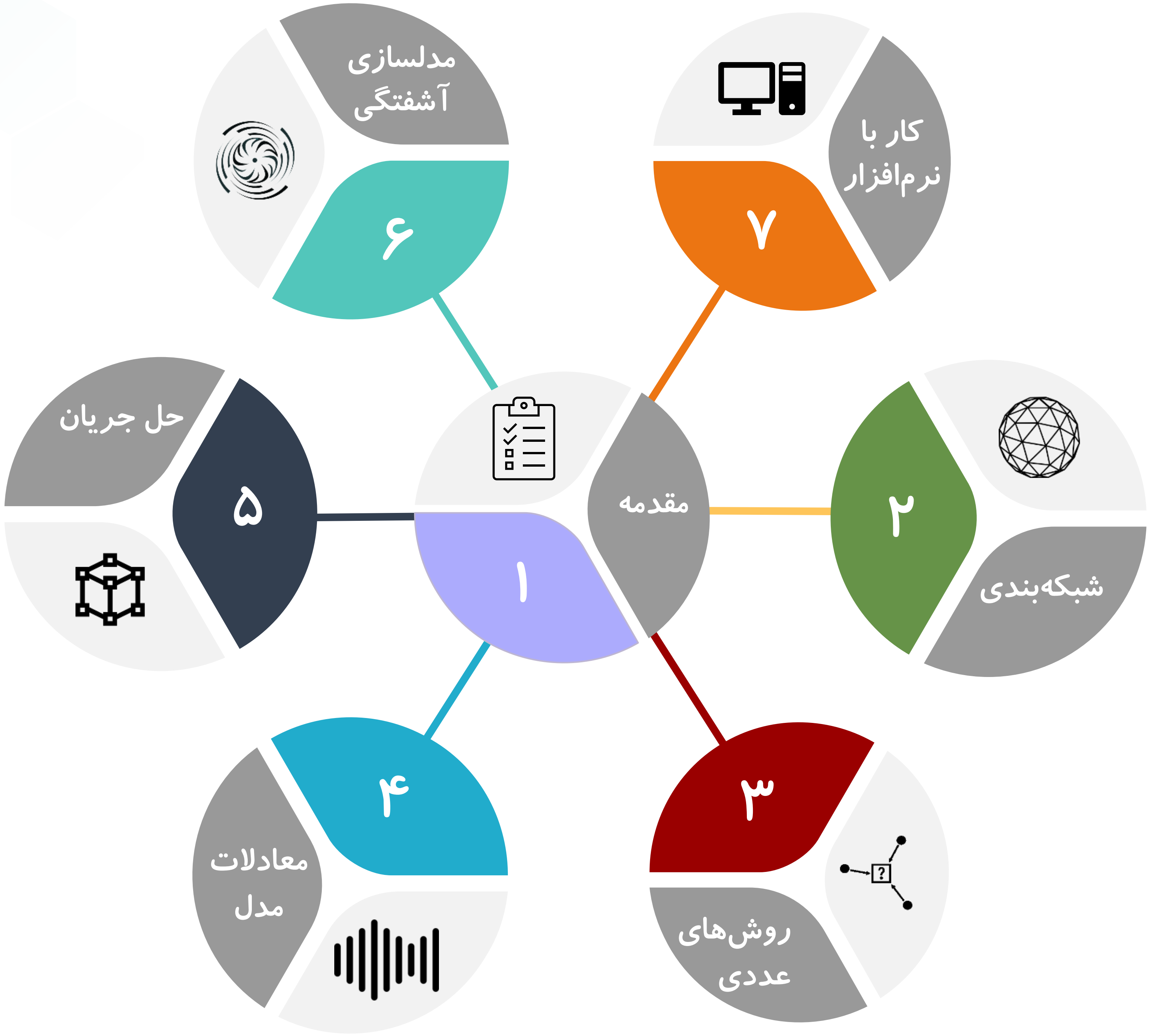
بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمات سیالات محاسباتی

محمدصادق کریمی

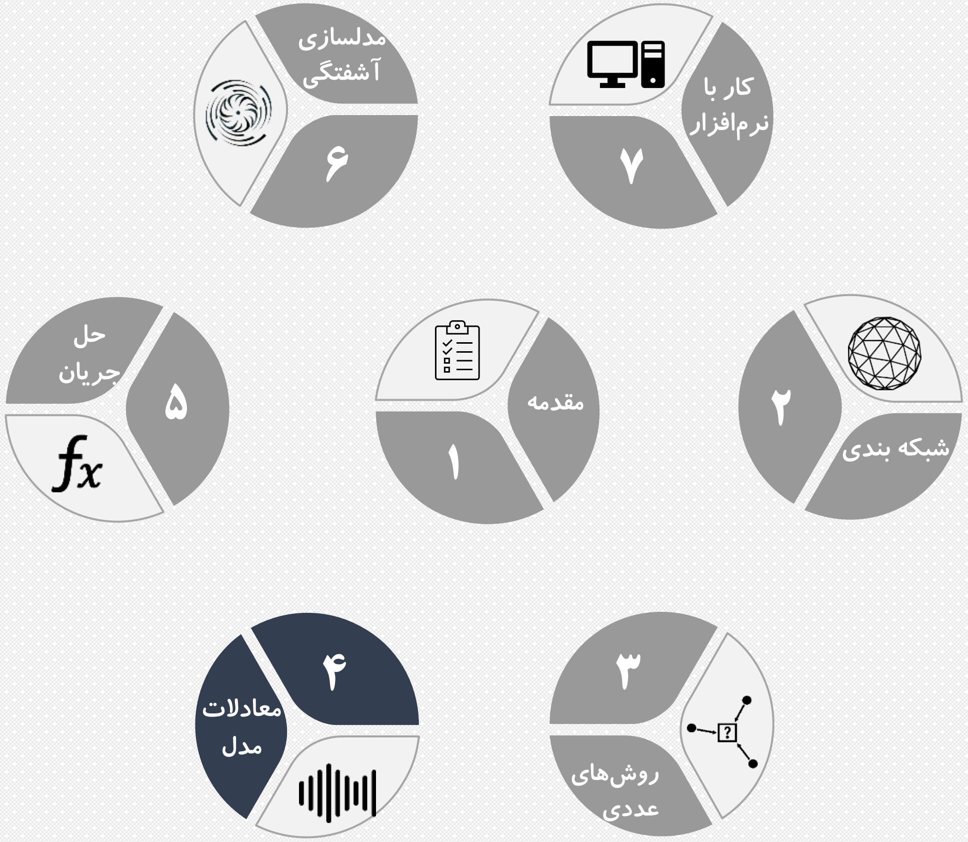
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

پاییز ۱۴۰۰



دانشگاه صنعتی شریف

۴ معادلات مدل



تفاضل محدود

خوش وضع:

- ✓ شرط اولیه (روی مقدار تابع)
- ✓ شرایط مرزی (روی مقدار یا گرادیان تابع)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$$IC: \phi(x\,,0\,) = f(x)$$

$$BC: \begin{cases} \phi(0\,,t) = g(t) \\ \phi(l\,,t) = h(t) \end{cases}$$

شرط مرزی دیریشله (Dirichlet)

$$BC: \frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)$$

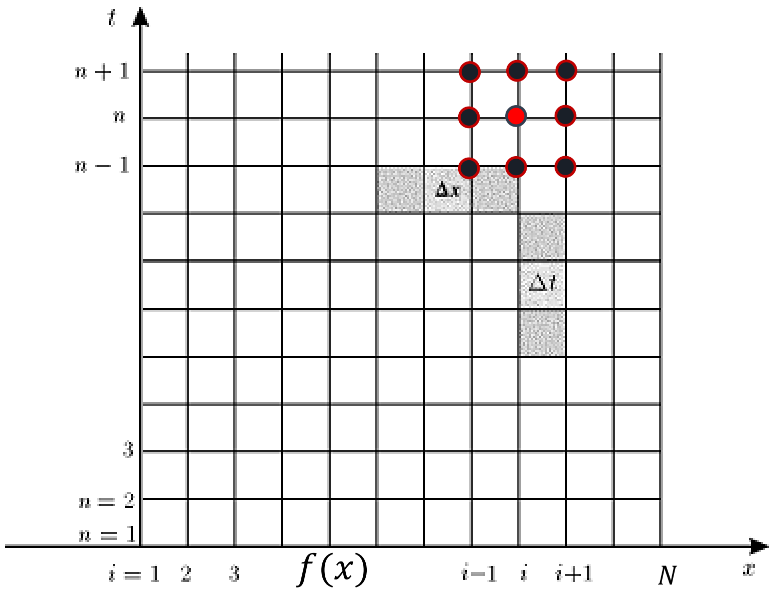
شرط مرزی نیومن (Neumann)

$$BC: a\phi(l\,,t) + b\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)$$

شرط مرزی رابین (Robin)

تفاضل محدود

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$



$$\frac{d\phi_i}{dt} = \alpha \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$ نیمه گسسته

$$\phi = \phi(x,t) \qquad \phi_i^n = \phi(x_i, t_n)$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{x_i}^{t_n} = \alpha \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x_i}^{t_n}$$

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = ?$$

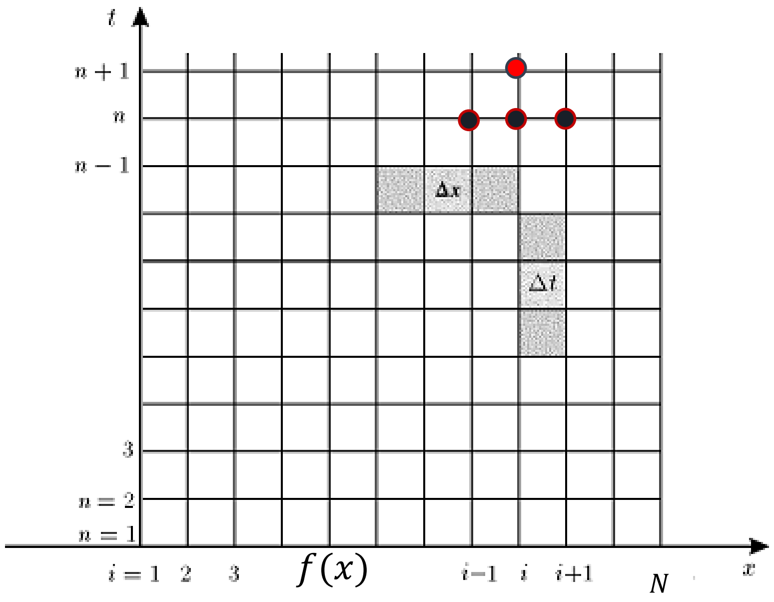
روش صریح اویلر (Explicit Euler)

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$ گسسته‌سازی پیشرو

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) = \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$ F.T.C.S.

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\boxed{\phi_i^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\phi_{i-1}^n + \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\phi_{i+1}^n + O(\Delta t, \Delta x^2)}$$



شرط اولیه $\phi(x, 0) = f(x)$ $\boxed{\phi_i^1 = f(x_i)}$

$$1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \geq 0 \quad \rightarrow \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$$

شرط پایداری

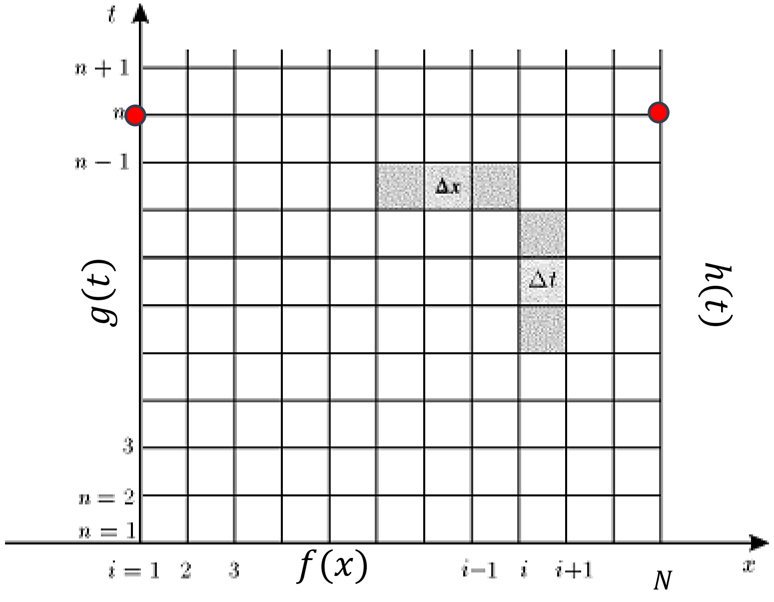
مثبت بودن تمامی ضرایب جهت تطبیق با فیزیک $\boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$

روش صریح اویلر – شرط مرزی دیریشله

$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t) = g(t)\\ \phi(l\,,t) = h(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi(0\,,t) = \phi\Big|_{x=x_1}^{t=t_n} = g(t_n)\\ \phi(l\,,t) = \phi\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = h(t_n)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\phi_1^n = g(t_n)\\ \phi_N^n = h(t_n)\end{cases}}$$



معادلات سهموی

تفاضل محدود

روش صریح اویلر – شرط مرزی نیومن

روش تفاضلی یکسو (One-sided Difference)

$$BC: \frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \frac{\phi_N^n - \phi_{N-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) = h(t_n)$$

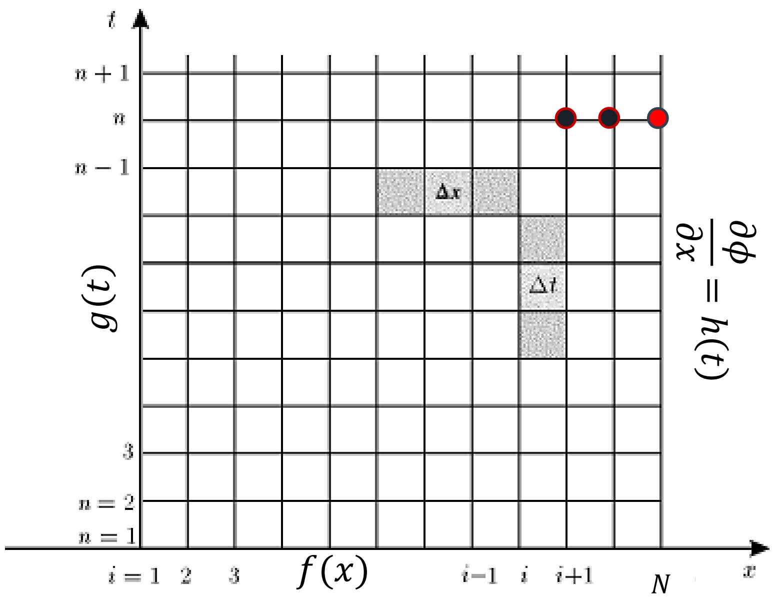
$$\boxed{\phi_N^n = h(t_n)\Delta x + \phi_{N-1}^n}$$

مرتبه یک

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \frac{3\phi_N^n - 4\phi_{N-1}^n + \phi_{N-2}^n}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) = h(t_n)$$

$$\boxed{\phi_N^n = \frac{4\phi_{N-1}^n - \phi_{N-2}^n - 2h(t_n)\Delta x}{3}}$$

مرتبه دو



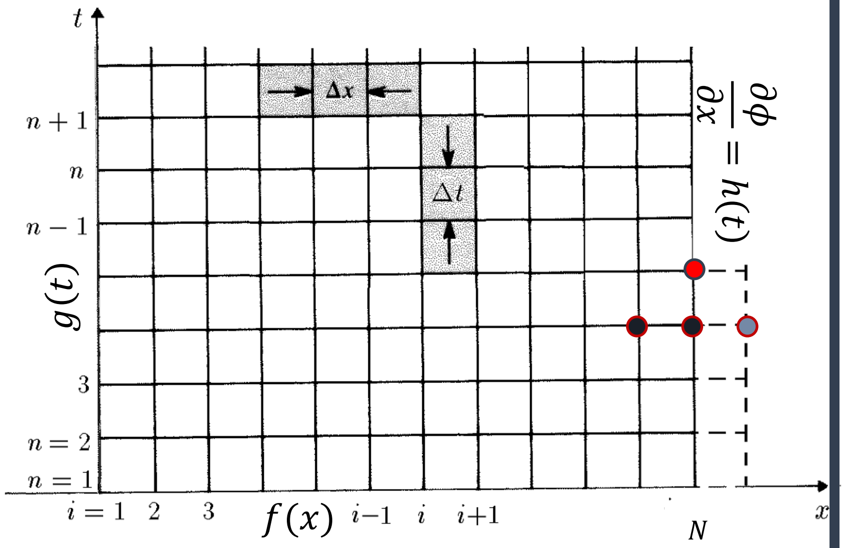
روش صریح اویلر – شرط مرزی نیومن

روش نقطه مجازی (Ghost node)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t)=\frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{x=x_N}^{t=t_n}=\frac{\phi_{N+1}^{n}-\phi_{N-1}^{n}}{2\Delta x}+O(\Delta x^2)=h(t_n)$$

$$\boxed{\phi_{N+1}^{n}=\phi_{N-1}^{n}+2h(t_n)\Delta x}$$

$$\phi_N^{n+1}=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^{n}+\left(1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N+1}^{n}+O(\Delta t,\Delta x^2)$$



تفاضل محدود

روش صریح اویلر – شرط مرزی رابین

روش نقطه مجازی

$$BC: a\phi(l\,,t) + b\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)$$

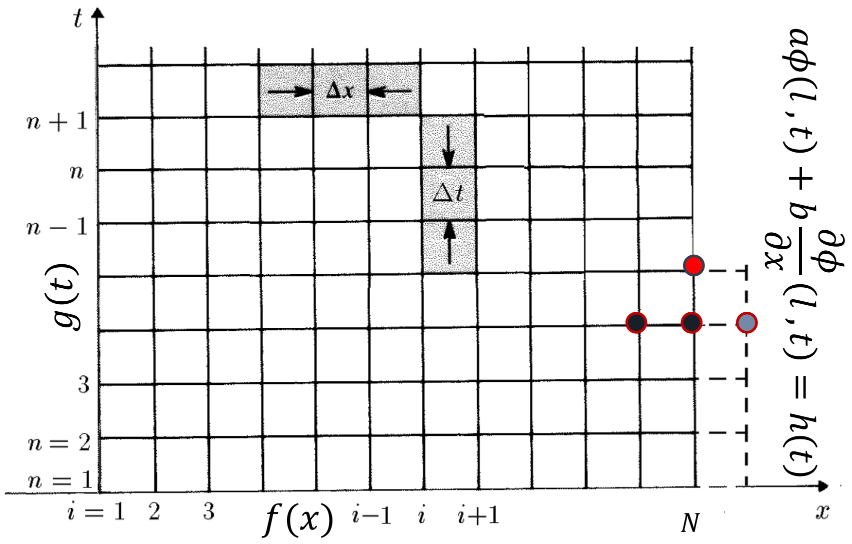
$$a\phi(l\,,t) + b\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)$$

$$\phi(l\,,t) = \phi\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \phi_N^n$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \frac{\phi_{N+1}^n - \phi_{N-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$a\phi_N^n + b\frac{\phi_{N+1}^n - \phi_{N-1}^n}{2\Delta x} = h(t_n)$$

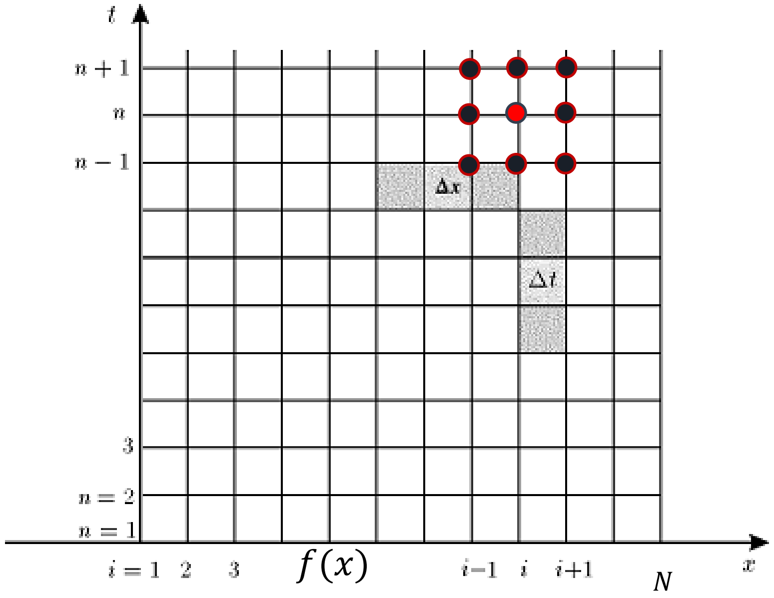
$$\boxed{\phi_{N+1}^n = \phi_{N-1}^n + \frac{2\Delta x}{b}\left(h(t_n) - a\phi_N^n\right)}$$



$$\phi_N^{n+1} = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n + \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N+1}^n + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

تفاضل محدود

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$



نیمه گسسته $\quad \dfrac{d\phi_i}{dt} = \alpha \dfrac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$

$$\phi = \phi(x,t) \qquad \phi_i^n = \phi(x_i, t_n)$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{x_i}^{t_n} = \alpha \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x_i}^{t_n}$$

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \qquad \left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = ?$$

شرط اولیه $\quad \phi(x\,,0\,) = f(x) \qquad \boxed{\phi_i^1 = f(x_i)}$

معادلات سهموی

تفاضل محدود

روش ضمنی اویلر (Implicit Euler)

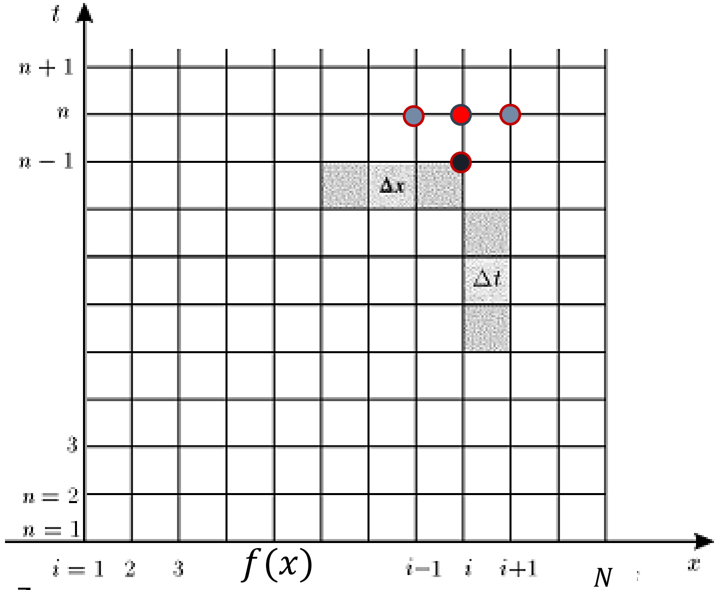
گسسته‌سازی پسرو

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

BTCS

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) = \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$\boxed{\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\phi_{i-1}^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_i^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{i+1}^n = -\phi_i^{n-1} + O(\Delta t, \Delta x^2)}$$



$$\begin{bmatrix} ? & ? & & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \\ \phi_3^n \\ \vdots \\ \phi_{N-1}^n \\ \phi_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ -\phi_2^{n-1} \\ -\phi_3^{n-1} \\ \vdots \\ -\phi_{N-1}^{n-1} \\ ? \end{bmatrix}$$

دستگاه سه قطری

(Tri-diagonal)

شرط پایداری

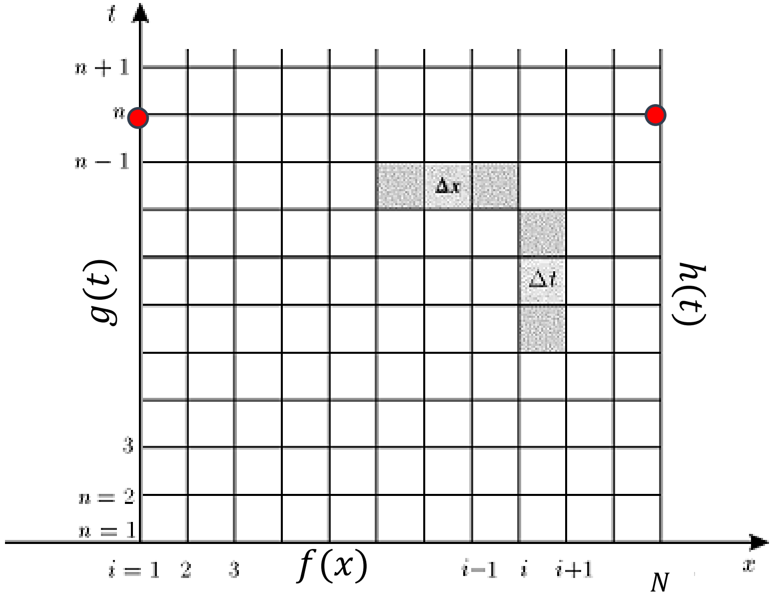
بدون قید و شرط پایدار

معادلات سهموی

تفاضل محدود

روش ضمنی اویلر – شرط مرزی دیریشله

$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t)=g(t)\\ \phi(l\,,t)=h(t)\end{cases}$$



$$\begin{cases}\phi(0\,,t)=\phi\Big|_{x=x_1}^{t=t_n}=g(t_n)\\ \phi(l\,,t)=\phi\Big|_{x=x_N}^{t=t_n}=h(t_n)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\phi_1^n=g(t_n)\\ \phi_N^n=h(t_n)\end{cases}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^n\\ \phi_2^n\\ \phi_3^n\\ \vdots\\ \phi_{N-1}^n\\ \phi_N^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g(t_n)\\ -\phi_2^{n-1}\\ -\phi_3^{n-1}\\ \vdots\\ -\phi_{N-1}^{n-1}\\ h(t_n)\end{bmatrix}$$

تفاضل محدود

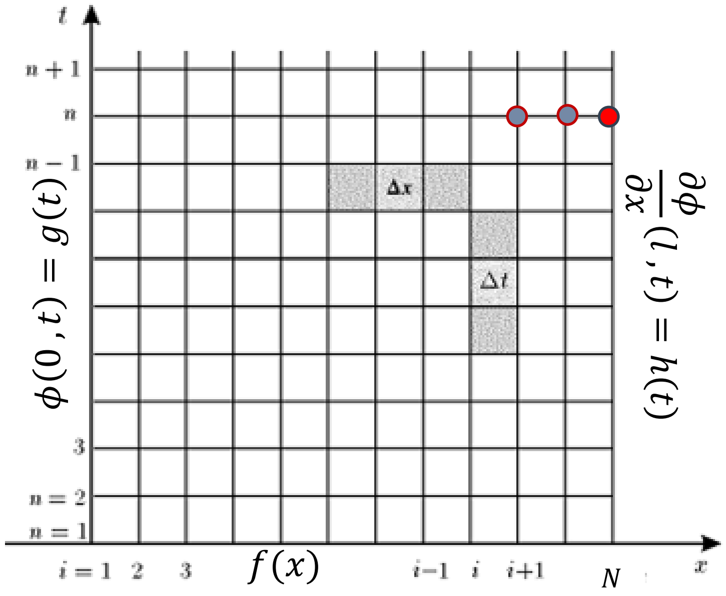
روش ضمنی اویلر – شرط مرزی نیومن

روش تفاضلی یکسو

$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t) = g(t)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi(0\,,t) = \phi\Big|_{x=x_1}^{t=t_n} = \phi_1^n = g(t_n)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(l\,,t) = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \dfrac{3\phi_N^n - 4\phi_{N-1}^n + \phi_{N-2}^n}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) = h(t_n)\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\Delta x}\phi_{N-2}^n - \frac{4}{2\Delta x}\phi_{N-1}^n + \frac{3}{2\Delta x}\phi_N^n = h(t_n)}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & \frac{1}{2\Delta x} & -\frac{2}{\Delta x} & \frac{3}{2\Delta x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^n\\ \phi_2^n\\ \phi_3^n\\ \vdots\\ \phi_{N-1}^n\\ \phi_N^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(t_n)\\ -\phi_2^{n-1}\\ -\phi_3^{n-1}\\ \vdots\\ -\phi_{N-1}^{n-1}\\ h(t_n)\end{bmatrix}$$

دستگاه سه قطری نیست

معادلات سهموی

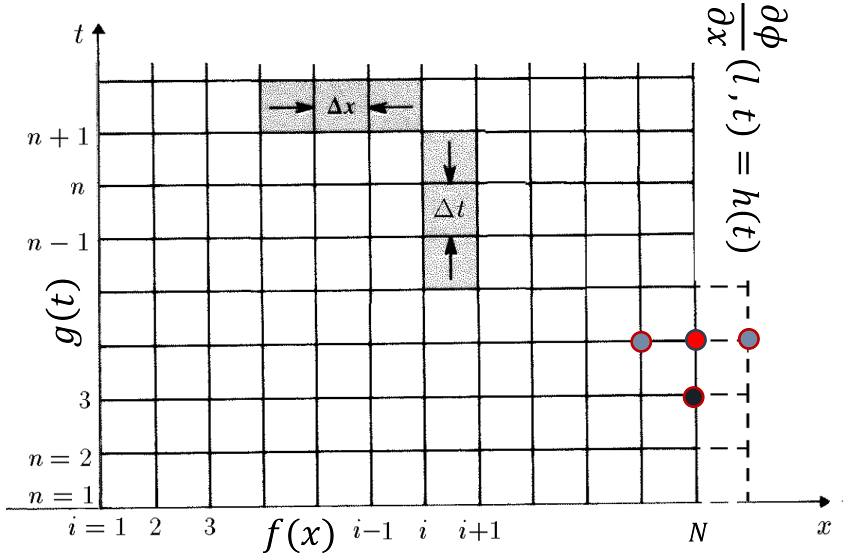
تفاضل محدود

روش ضمنی اویلر – شرط مرزی نیومن

روش نقطه مجازی

$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t) = g(t)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi(0\,,t) = \phi\Big|_{x=x_1}^{t=t_n} = \phi_1^n = g(t_n)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(l\,,t) = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \dfrac{\phi_{N+1}^n - \phi_{N-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) = h(t_n)\end{cases}$$



$$\phi_{N+1}^n = \phi_{N-1}^n + 2h(t_n)\Delta x$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N+1}^n = -\phi_N^{n-1} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{N-1}^n + 2h(t_n)\Delta x) = -\phi_N^{n-1}$$

روش ضمنی اویلر – شرط مرزی نیومن

روش نقطه مجازی

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n-\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}2h(t_n)\Delta x=-\phi_N^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n-\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n=-\phi_N^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}h(t_n)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & & \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^n\\ \phi_2^n\\ \phi_3^n\\ \vdots\\ \phi_{N-1}^n\\ \phi_N^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g(t_n)\\ -\phi_2^{n-1}\\ -\phi_3^{n-1}\\ \vdots\\ -\phi_{N-1}^{n-1}\\ -\phi_N^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}h(t_n)\end{bmatrix}$$

معادلات سهموی

تفاضل محدود

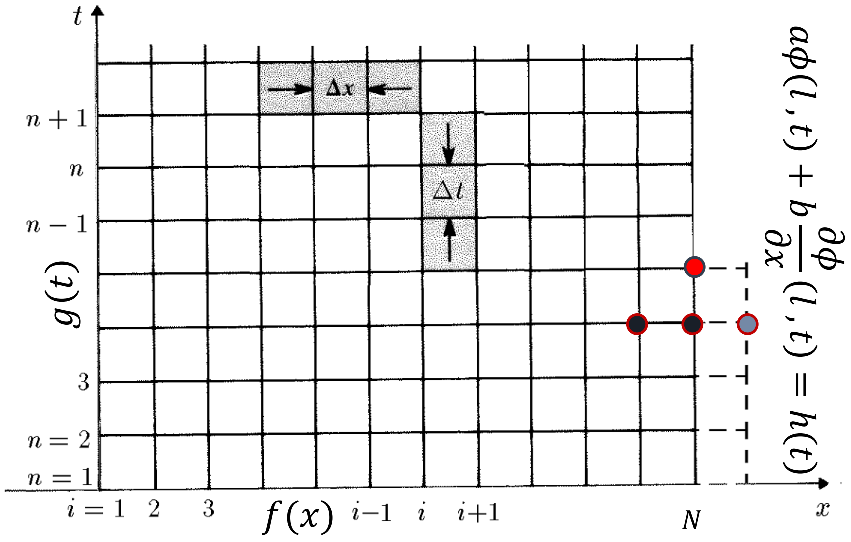
روش ضمنی اویلر – شرط مرزی رابین

روش نقطه مجازی

$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t) = g(t)\\ a\phi(l\,,t) + b\,\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)\end{cases}$$

$$\phi(l\,,t) = \phi\,\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \phi_N^n$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(l\,,t) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=x_N}^{t=t_n} = \frac{\phi_{N+1}^n - \phi_{N-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$



$$\begin{cases}\phi(0\,,t) = \phi\,\Big|_{x=x_1}^{t=t_n} = \phi_1^n = g(t_n)\\ a\phi_N^n + b\,\dfrac{\phi_{N+1}^n - \phi_{N-1}^n}{2\Delta x} = h(t_n)\end{cases}$$

$$\phi_{N+1}^n = \phi_{N-1}^n + \frac{2\Delta x}{b}\left(h(t_n) - a\phi_N^n\right)$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N+1}^n = -\phi_N^{n-1} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

روش ضمنی اویلر – شرط مرزی رابین

روش نقطه مجازی

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n-\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(\phi_{N-1}^n+\frac{2\Delta x}{b}\left(h(t_n)\ -a\phi_N^n\right)\right)=-\phi_N^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n-\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(1+\frac{a\Delta x}{b})\right)\phi_N^n=-\phi_N^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{b\Delta x}h(t_n)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & & \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(1+\frac{a\Delta x}{b})\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^n\\ \phi_2^n\\ \phi_3^n\\ \vdots\\ \phi_{N-1}^n\\ \phi_N^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g(t_n)\\ -\phi_2^{n-1}\\ -\phi_3^{n-1}\\ \vdots\\ -\phi_{N-1}^{n-1}\\ -\phi_N^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{b\Delta x}h(t_n)\end{bmatrix}$$

تفاضل محدود

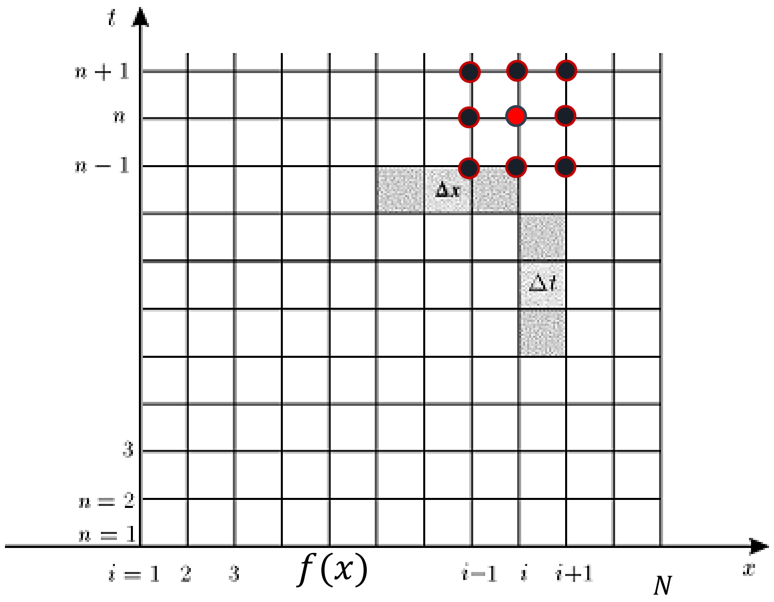
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \alpha \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$ نیمه گسسته

$$\phi = \phi(x,t) \qquad \phi_i^n = \phi(x_i, t_n)$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{x_i}^{t_n} = \alpha \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x_i}^{t_n}$$

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \qquad \left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = R_i^n \qquad \left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = ?$$



$$R_i^n = \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

معادلات سهموی

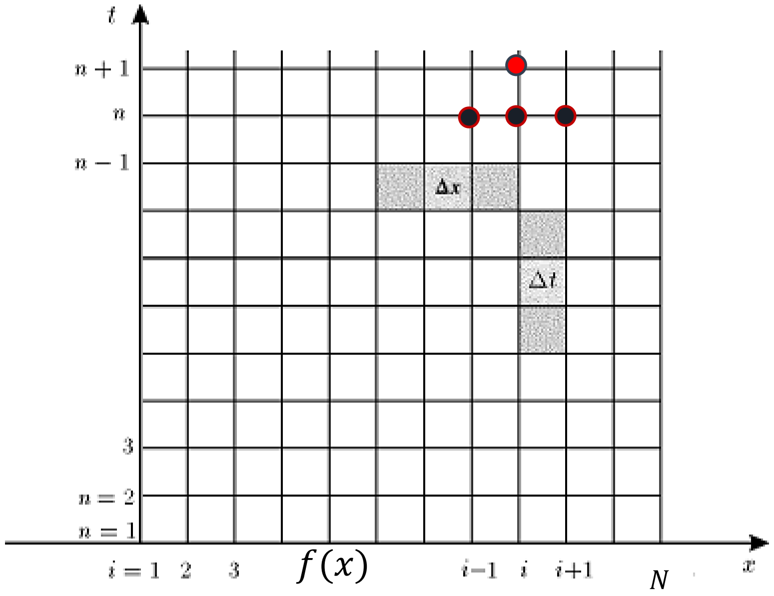
تفاضل محدود

روش‌های گسسته‌سازی زمان یا انتگرال‌گیری زمان

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = R_i^n \qquad \frac{\Delta\phi_i}{\Delta t} = R_i^n \qquad \Delta\phi_i = R_i^n \Delta t$$

روش صریح اویلر

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$



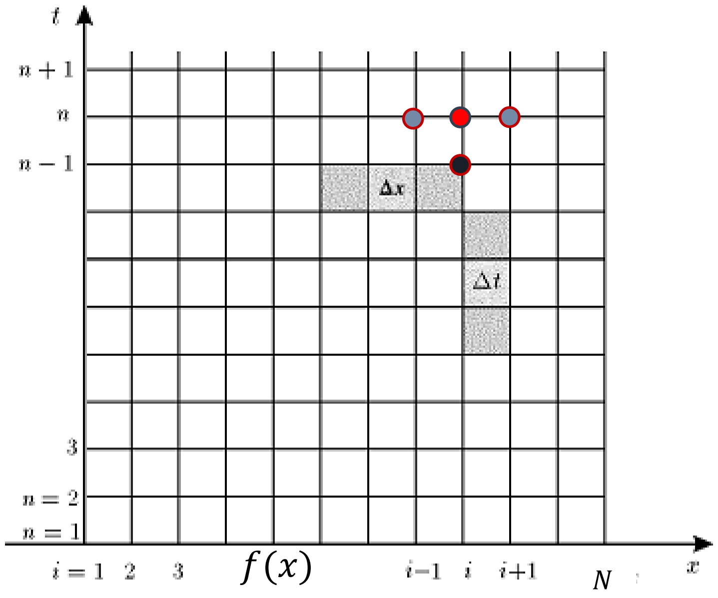
شرط پایداری

مثبت بودن تمامی ضرایب جهت تطبیق با فیزیک

$$\boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$

روش ضمنی اویلر

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = \frac{\phi_i^{n} - \phi_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$



شرط پایداری

بدون قید و شرط پایدار

معادلات سهموی

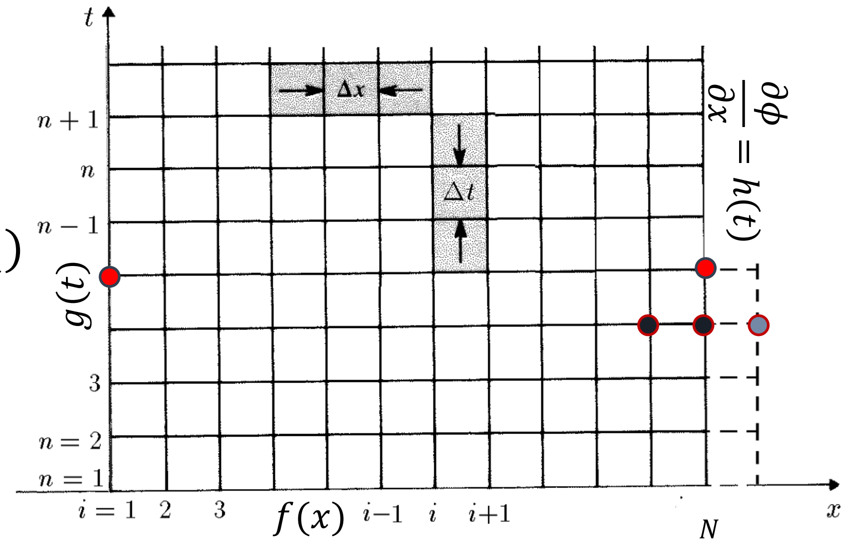
تفاضل محدود

شرط اولیه و شرایط مرزی

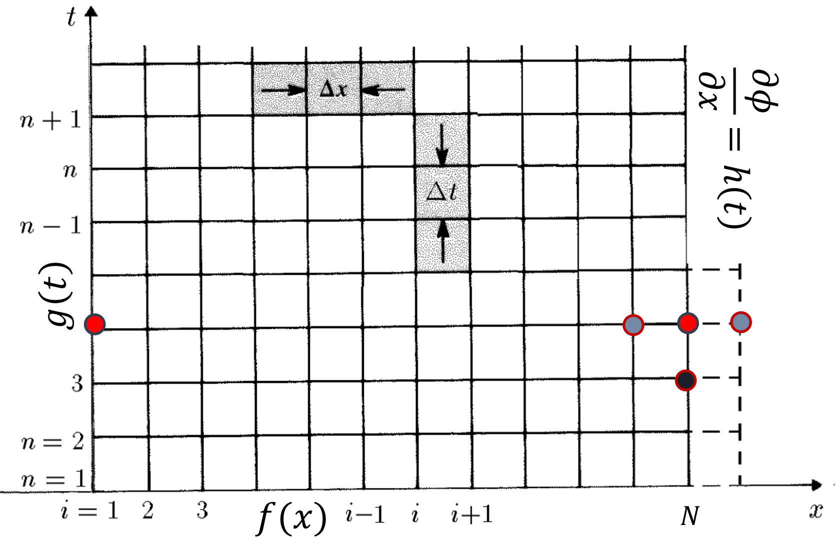
شرط اولیه $\phi(x\,,0\,) = f(x)$

$$\phi_i^1 = f(x_i)$$

روش صریح اویلر



روش ضمنی اویلر



$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = \frac{\phi_{N+1}^n - \phi_{N-1}^n}{2\Delta x} = h(t_n)$$

$$\phi_{N+1}^n = \phi_{N-1}^n + 2h(t_n)\Delta x$$

$$\phi_N^{n+1} = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n + \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N+1}^n$$

$$\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\phi_{N-1}^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_N^n = -\phi_N^{n-1} - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x}h(t_n)$$

روش صریح رانج-کوتا (Runge-Kutta)

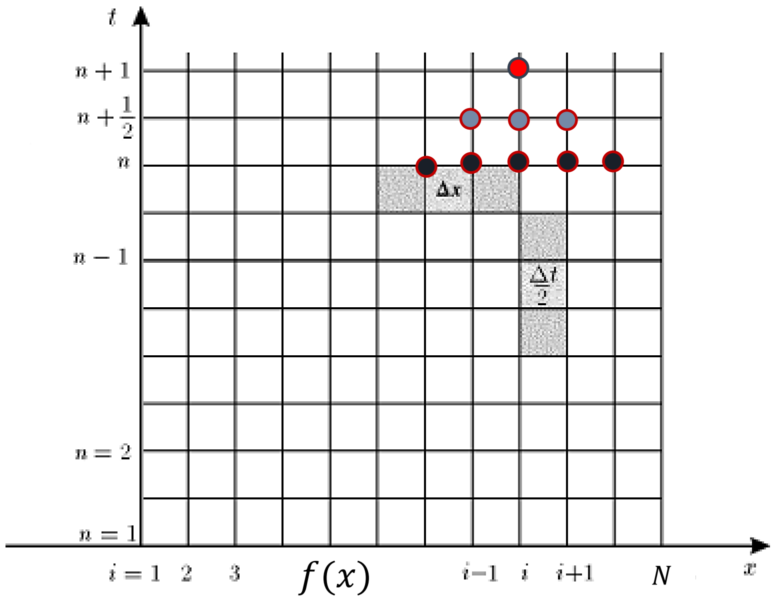
$$\frac{d\phi_i}{dt}\Big|^{t_n} = R_i^n$$

$$\begin{cases} \dfrac{\phi_i^{n+\frac{1}{2}} - \phi_i^n}{\Delta t/2} = R_i^n \\ \dfrac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = R_i^{n+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

RK2 $\rightarrow O(\Delta t^2)$

RK3 $\rightarrow O(\Delta t^3)$

RK4 $\rightarrow O(\Delta t^4)$



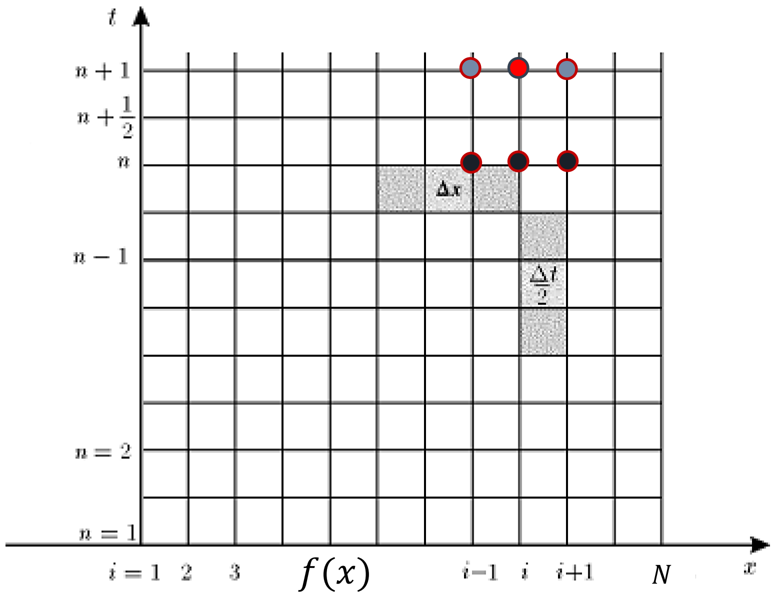
روش ضمنی کرنک-نیکلسون (Crank-Nicolson)

$$\left.\frac{d\phi_i}{dt}\right|^{t_n} = R_i^n$$

$$\frac{\phi_i^{n+\frac{1}{2}} - \phi_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(R_i^{n-\frac{1}{2}} + R_i^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(R_i^{n} + R_i^{n+1}\right)} \quad \rightarrow O(\Delta t^2)$$

$$\boxed{\phi_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}R_i^{n+1} = \phi_i^{n} + \frac{\Delta t}{2}R_i^{n}}$$



$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^{n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2}\left[\frac{\phi_{i+1}^{n} - 2\phi_i^{n} + \phi_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \Phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right]$$

$$-\frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2}\phi_{i+1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_i^{n+1} - \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2}\phi_{i-1}^{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_i^{n} + \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2}\phi_{i-1}^{n} + \frac{\alpha\Delta t}{2\Delta x^2}\phi_{i+1}^{n}$$

معادلات سهموی

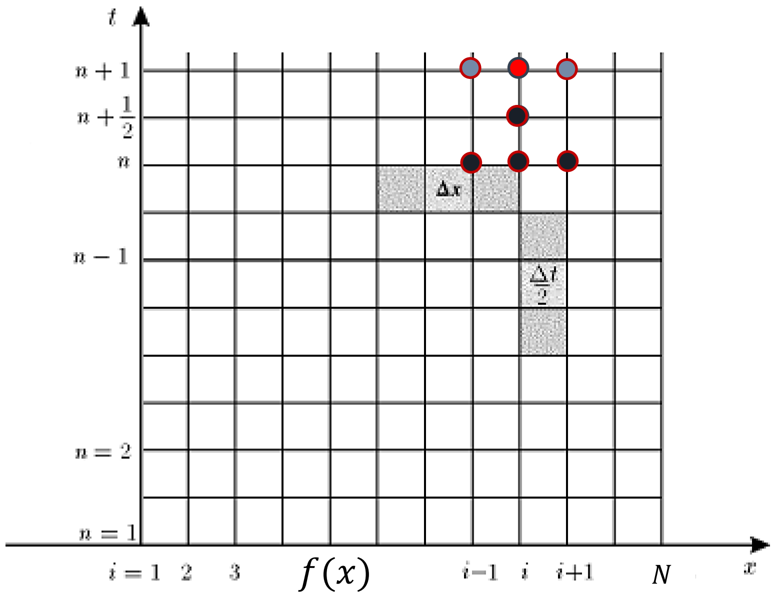
تفاضل محدود

روش ضمنی کرنک-نیکلسون

روش صریح اویلر $n \rightarrow n+\frac{1}{2}$ $\quad \frac{\phi_i^{n+\frac{1}{2}}-\phi_i^n}{\Delta t/2}=R_i^n$

روش ضمنی اویلر $n+\frac{1}{2} \rightarrow n+1$ $\quad \frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=R_i^{n+1}$

$$\begin{cases} \dfrac{\phi_i^{n+\frac{1}{2}}-\phi_i^n}{\Delta t/2}=\alpha\left(\dfrac{\phi_{i+1}^n-2\phi_i^n+\phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) \\[2ex] \dfrac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=\alpha\left(\dfrac{\phi_{i+1}^{n+1}-2\phi_i^{n+1}+\phi_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) \end{cases}$$



حل دستگاه معادلات

روش‌های تقریبی

الگوریتم توماس (Thomas)

$$[A]_{N\times N}[X]_{N\times 1} = [D]_{N\times 1} \quad \Rightarrow X = A^{-1}D \qquad A^{-1} \quad \rightarrow O(N^3)$$

حل دقیق برای ماتریس سه قطری

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & \\ & 0 & 1 & \gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & \gamma_{N-1} \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_{N-1} \\ \rho_N \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات

الگوریتم توماس

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$b_1x_1 + c_1x_2 = d_1$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

$$\frac{a_2}{b_1}(b_1x_1 + c_1x_2 = d_1)$$

$$-\left(a_2x_1 + \frac{a_2c_1}{b_1}x_2 = \frac{a_2d_1}{b_1}\right)$$

$$x_1 + \gamma_1x_2 = \rho_1$$

$$\left(b_2 - \frac{a_2c_1}{b_1}\right)x_2 + c_2x_3 = d_2 - \frac{a_2d_1}{b_1}$$

$$x_2 + \gamma_2x_3 = \rho_2$$

$$\boxed{x_1 + \frac{c_1}{b_1}x_2 = \frac{d_1}{b_1}}$$

$$\boxed{x_2 + \frac{c_2b_1}{b_2b_1 - a_2c_1}x_3 = \frac{b_1d_2 - a_2d_1}{b_2b_1 - a_2c_1}}$$

حل دستگاه معادلات

الگوریتم توماس

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 = c_1/b_1 & & & & \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 = d_1/b_1 \\ \rho_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$x_2 + \gamma_2 x_3 = \rho_2$$

$$a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 = d_3$$

$$a_3(x_2 + \gamma_2 x_3 = \rho_2)$$

$$-\quad (a_3 x_2 + a_3 \gamma_2 x_3 = a_3 \rho_2)$$

$$(b_3 - a_3\gamma_2)x_2 + c_3 x_4 = d_3 - a_3\rho_2$$

$$x_3 + \gamma_3 x_4 = \rho_3$$

$$\boxed{x_3 + \frac{c_3}{b_3 - a_3\gamma_2} x_4 = \frac{d_3 - a_3\rho_2}{b_3 - a_3\gamma_2}}$$

حل دستگاه معادلات

الگوریتم توماس

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & \\ & 0 & 1 & \gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 & \gamma_{N-1} \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \vdots \\ \rho_{N-1} \\ \rho_N \end{bmatrix}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i}, & i = 1 \\ \dfrac{c_i}{b_i - a_i\gamma_{i-1}}, & i = 2,3,\dots,N \end{cases}$$

$$\rho_i = \begin{cases} \dfrac{d_i}{b_i}, & i = 1 \\ \dfrac{d_i - a_i\,\rho_{i-1}}{b_i - a_i\gamma_{i-1}}, & i = 2,3,\dots,N \end{cases}$$

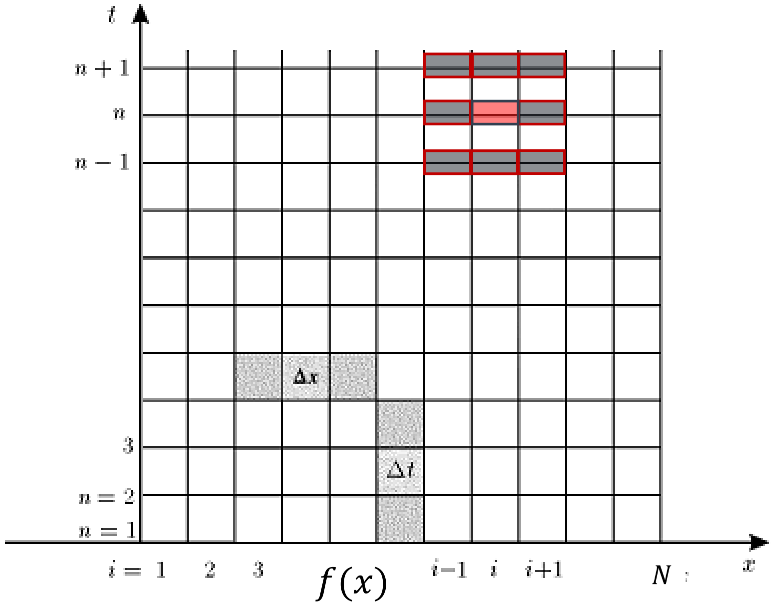
$$x_N = \rho_N$$

$$x_i + \gamma_i x_{i+1} = \rho_i$$

$$x_i = \begin{cases} \rho_i, & i = N \\ \rho_i - \gamma_i x_{i+1}, & i = 1,2,\dots,N-1 \end{cases}$$

حجم محدود

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\qquad 0\le x\le l\qquad t\ge 0$$



$$\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0\qquad \frac{1}{\Delta x}\int\frac{\partial\phi}{\partial t}dx-\frac{1}{\Delta x}\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx=0$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt}-\frac{\alpha}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_e-\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_w\right]=0\qquad \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_e=\frac{\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i}{\Delta x}+O(\Delta x^2)$$

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt}=\alpha\left(\frac{\bar{\phi}_{i+1}-2\bar{\phi}_i+\bar{\phi}_{i-1}}{\Delta x^2}\right)+O(\Delta x^2)$$

نیمه گسسته

$$\left.\frac{d\bar{\phi}}{dt}\right|^{t_n}=\alpha\frac{\bar{\phi}^n_{i+1}-2\bar{\phi}^n_i+\bar{\phi}^n_{i-1}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)\qquad \left.\frac{d\bar{\phi}}{dt}\right|^{t_n}=?$$

معادلات سهموی

حجم محدود

روش صریح اویلر

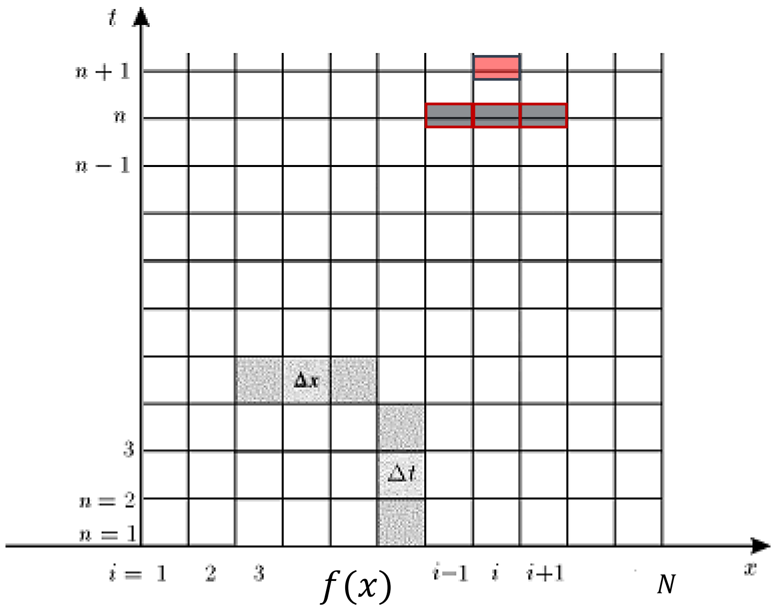
گسسته‌سازی پیشرو

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = \frac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\phi}_i^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\phi}_i^{n}}{\Delta t} + O(\Delta t) = \alpha\left(\frac{\bar{\phi}_{i+1}^{n} - 2\bar{\phi}_i^{n} + \bar{\phi}_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}\right) + O(\Delta x^2)$$

$$\bar{\phi}_i^{n+1} = \bar{\phi}_i^{n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(\bar{\phi}_{i+1}^{n} - 2\bar{\phi}_i^{n} + \bar{\phi}_{i-1}^{n}) + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\boxed{\bar{\phi}_i^{n+1} = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i+1}^{n} + \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_i^{n} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i-1}^{n} + O(\Delta t, \Delta x^2)}$$



شرط پایداری

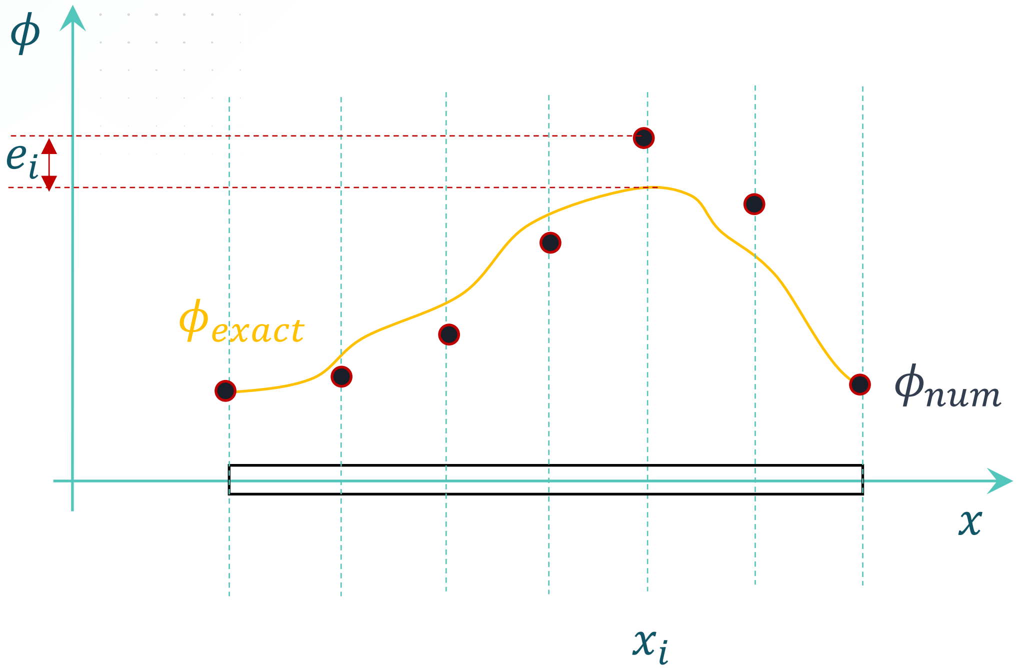
مثبت بودن تمامی ضرایب جهت تطبیق با فیزیک

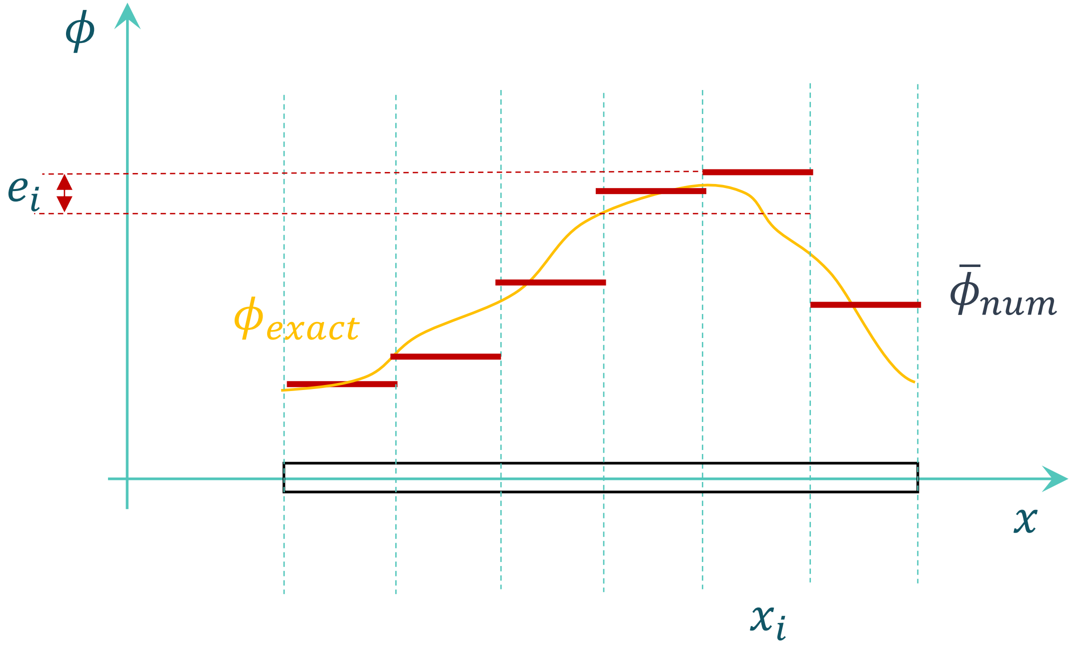
$$\boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}}$$

حجم محدود

تفاضل محدود

حجم محدود





معادلات سهموی

حجم محدود

روش صریح اویلر – شرط مرزی دیریشله

روش تفاضلی یکسو

$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t) = g(t)\\ \phi(l\,,t) = h(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi(0\,,t) = \phi_w\Big|_{i=1}^{t=t_n} = g(t_n)\\ \phi(l\,,t) = \phi_e\Big|_{i=N}^{t=t_n} = h(t_n)\end{cases}$$

مرتبه اول

$$\begin{cases}\phi_w = \bar{\phi}_i + O(\Delta x)\\ \phi_e = \bar{\phi}_{i-1} + O(\Delta x)\end{cases}$$

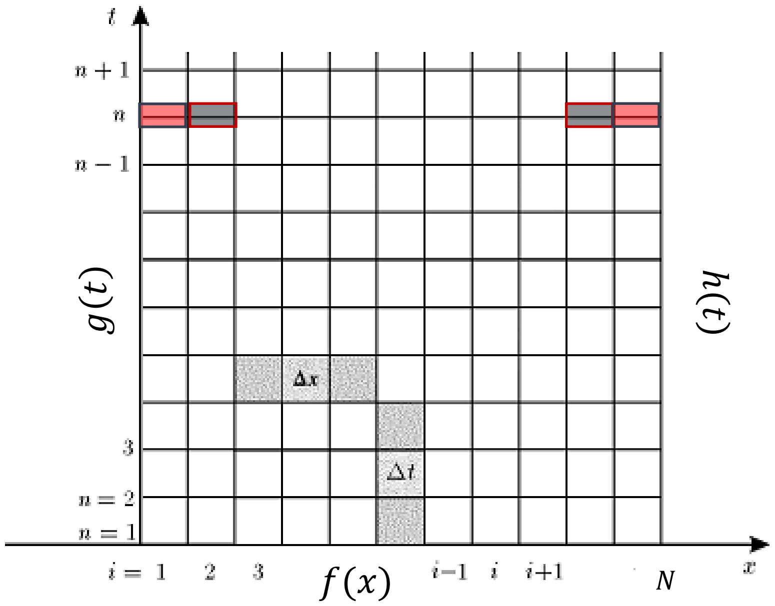
$$\boxed{\begin{cases}\bar{\phi}_1^n = g(t_n)\\ \bar{\phi}_N^n = h(t_n)\end{cases}}$$

مرتبه دوم

$$\begin{cases}\phi_w = \dfrac{3\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)\\ \phi_e = \dfrac{-\bar{\phi}_{i-1} + 3\bar{\phi}_i}{2} + O(\Delta x^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{3\bar{\phi}_1^n - \bar{\phi}_2^n}{2} = g(t_n)\\ \dfrac{3\bar{\phi}_N^n - \bar{\phi}_{N-1}^n}{2} = h(t_n)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\bar{\phi}_1^n = \dfrac{2g(t_n) + \bar{\phi}_2^n}{3}\\ \bar{\phi}_N^n = \dfrac{2h(t_n) + \bar{\phi}_{N-1}^n}{3}\end{cases}}$$



معادلات سهموی

حجم محدود

روش صریح اویلر – شرط مرزی دیریشله

روش سلول مجازی (Ghost cell)

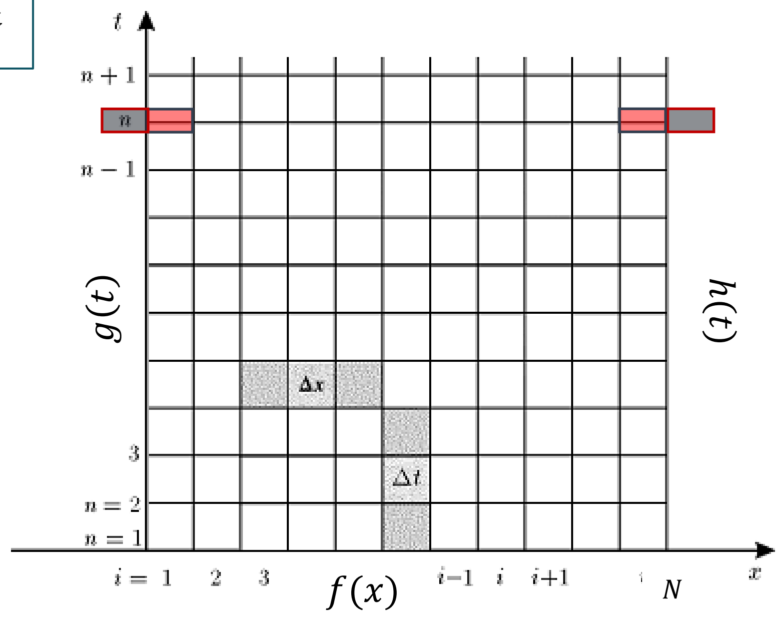
$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t)=g(t)\\ \phi(l\,,t)=h(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi(0\,,t)=\phi_w\Big|_{i=1}^{t=t_n}=g(t_n)\\ \phi(l\,,t)=\phi_e\Big|_{i=N}^{t=t_n}=h(t_n)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\phi_w=\dfrac{\bar{\phi}_{i-1}+\bar{\phi}_i}{2}+O(\Delta x^2)\\ \phi_e=\dfrac{\bar{\phi}_i+\bar{\phi}_{i+1}}{2}+O(\Delta x^2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\bar{\phi}_0^n+\bar{\phi}_1^n}{2}=g(t_n)\\ \dfrac{\bar{\phi}_N^n+\bar{\phi}_{N+1}^n}{2}=h(t_n)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\bar{\phi}_0^n=2g(t_n)-\bar{\phi}_1^n\\ \bar{\phi}_{N+1}^n=2h(t_n)-\bar{\phi}_N^n\end{cases}}$$



$$\begin{cases}\bar{\phi}_1^{n+1}=\dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_2^n+\left(1-\dfrac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_1^n+\dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(2g(t_n)-\bar{\phi}_1^n\right)+O(\Delta t,\Delta x^2)\\ \bar{\phi}_N^{n+1}=\dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(2h(t_n)-\bar{\phi}_N^n\right)+\left(1-\dfrac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n+\dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n+O(\Delta t,\Delta x^2)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases}\bar{\phi}_1^{n+1}=\dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_2^n+\left(1-\dfrac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_1^n+\dfrac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}g(t_n)\\ \bar{\phi}_N^{n+1}=\left(1-\dfrac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n+\dfrac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n+\dfrac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}h(t_n)\end{cases}}$$

حجم محدود

روش صریح اویلر – شرط مرزی نیومن

روش سلول مجازی

$$BC: \frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = h(t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,,t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_e \bigg|_{i=N}^{t=t_n} = h(t_n)$$

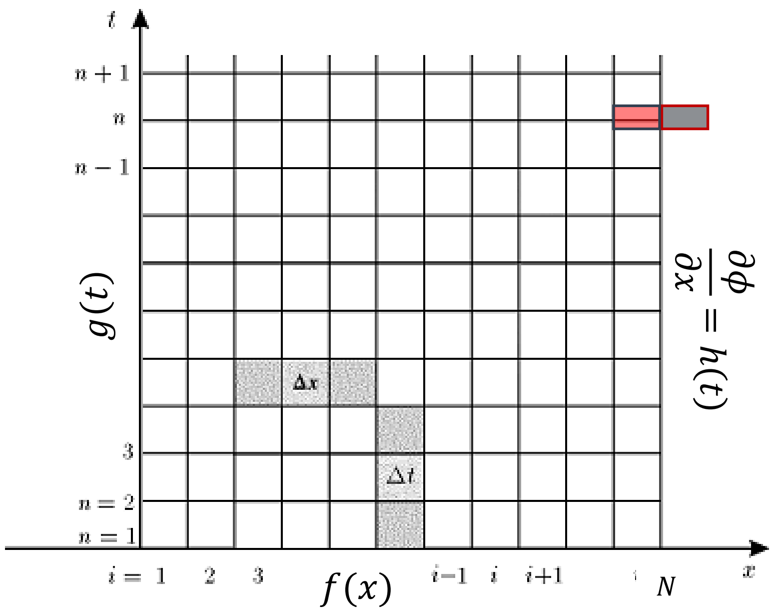
$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_e = \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\bar{\phi}_{N+1}^n - \bar{\phi}_N^n}{\Delta x} = h(t_n)$$

$$\boxed{\bar{\phi}_{N+1}^n = h(t_n)\Delta x + \bar{\phi}_N^n}$$

$$\bar{\phi}_N^{n+1} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\left(h(t_n)\Delta x + \bar{\phi}_N^n\right) + \left(1 - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\boxed{\bar{\phi}_N^{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}h(t_n)}$$



معادلات سهموی

حجم محدود

روش صریح اویلر – شرط مرزی نیومن

روش اعمال شرط مرزی قبل از گسسته‌سازی

$$BC: \frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,, t) = h(t)$$

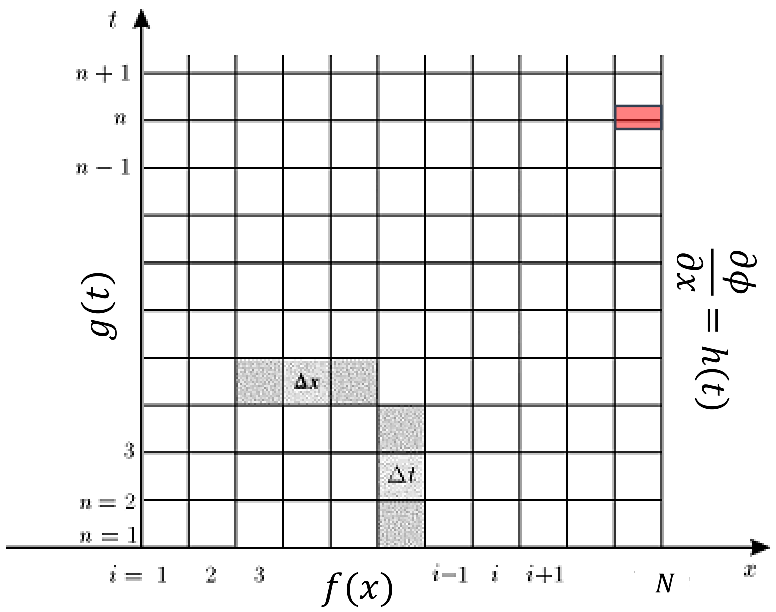
$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l\,, t) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_e \Big|_{i=N}^{t=t_n} = h(t_n)$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} - \frac{\alpha}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right|_e - \left.\frac{\partial \phi_i}{\partial x}\right|_w\right] = 0 \qquad \frac{d\bar{\phi}_N}{dt} - \frac{\alpha}{\Delta x}\left[\left.\frac{\partial \phi_N}{\partial x}\right|_e - \left.\frac{\partial \phi_N}{\partial x}\right|_w\right] = 0$$

$$\frac{d\bar{\phi}_N}{dt} - \frac{\alpha}{\Delta x}\left[h(t_n) - \left.\frac{\partial \phi_N}{\partial x}\right|_w\right] = 0 \qquad \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_w = \frac{\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\bar{\phi}_N^{n+1} - \bar{\phi}_N^{n}}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x}\left[h(t_n) - \frac{\bar{\phi}_N^{n} - \bar{\phi}_{N-1}^{n}}{\Delta x}\right]$$

$$\boxed{\bar{\phi}_N^{n+1} = \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^{n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^{n} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} h(t_n)}$$



حجم محدود

شرط اولیه

$$\bar{\phi}_i^1 = ?$$

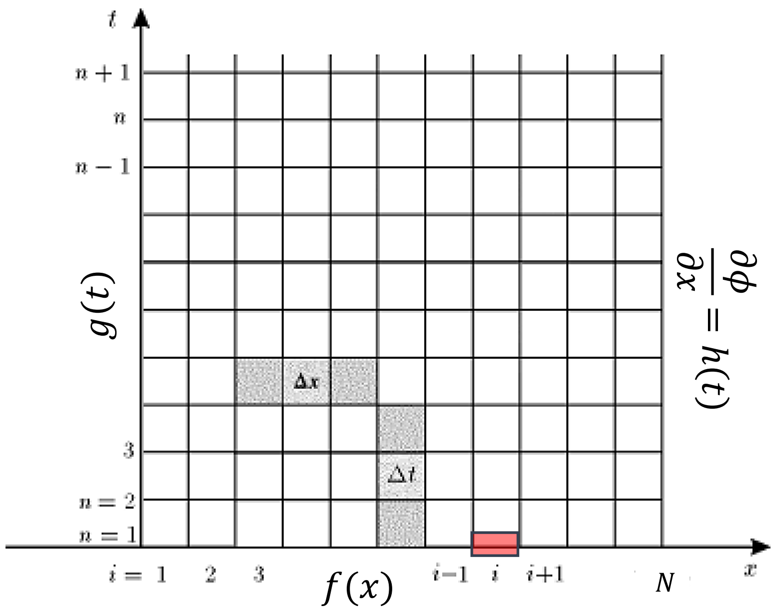
$$IC: \phi(x, 0) = f(x)$$

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_w}^{x_e} \phi \mathrm{d}x \qquad \bar{\phi}_i(t) = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_w}^{x_e} \phi(x,t) \mathrm{d}x$$

$$\bar{\phi}_i^1 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_w}^{x_e} \phi(x,0) \mathrm{d}x = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_w}^{x_e} f(x) \mathrm{d}x = \bar{f}_i \qquad \boxed{\bar{\phi}_i^1 = \bar{f}_i}$$

$$\boxed{\bar{f}_i = f_c + O(\Delta x^2)} \qquad \boxed{\bar{\phi}_i^1 = f_{i,c}}$$

$$\boxed{\bar{f}_i = \frac{1}{6}(f_w + f_c + f_e) + O(\Delta x^4)}$$



معادلات سهموی

حجم محدود

روش ضمنی اویلر

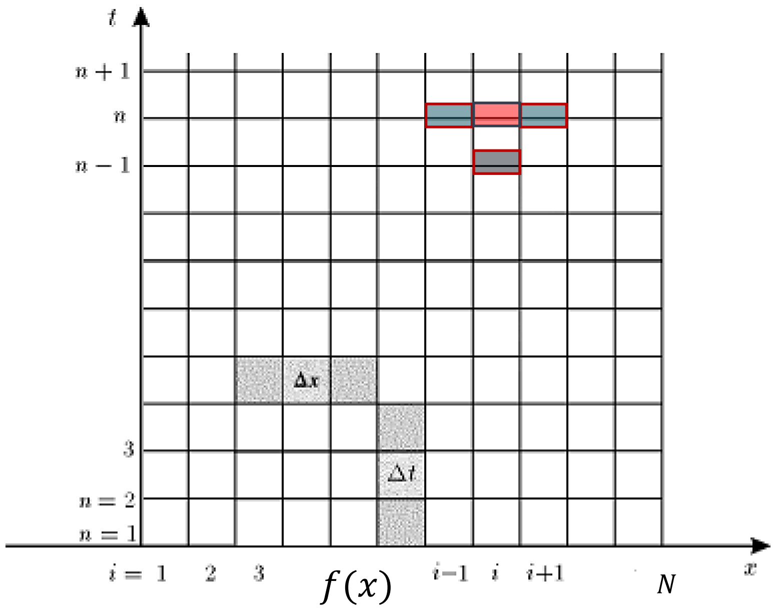
$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = \frac{\bar{\phi}_i^n - \bar{\phi}_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

گسسته‌سازی پسرو

$$\frac{\bar{\phi}_i^n - \bar{\phi}_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) = \alpha\left(\frac{\bar{\phi}_{i+1}^n - 2\bar{\phi}_i^n + \bar{\phi}_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) + O(\Delta x^2)$$

$$\boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i-1}^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_i^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i+1}^n = -\bar{\phi}_i^{n-1} + O(\Delta t, \Delta x^2)}$$

$$\begin{bmatrix} ? & ? & & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1^n \\ \bar{\phi}_2^n \\ \bar{\phi}_3^n \\ \vdots \\ \bar{\phi}_{N-1}^n \\ \bar{\phi}_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ -\bar{\phi}_2^{n-1} \\ -\bar{\phi}_3^{n-1} \\ \vdots \\ -\bar{\phi}_{N-1}^{n-1} \\ ? \end{bmatrix}$$



شرط پایداری

بدون قید و شرط پایدار

حجم محدود

روش ضمنی اویلر – شرط مرزی دیریشله

روش سلول مجازی

$$BC:\begin{cases}\phi(0\,,t) = g(t)\\ \phi(l\,,t) = h(t)\end{cases}$$

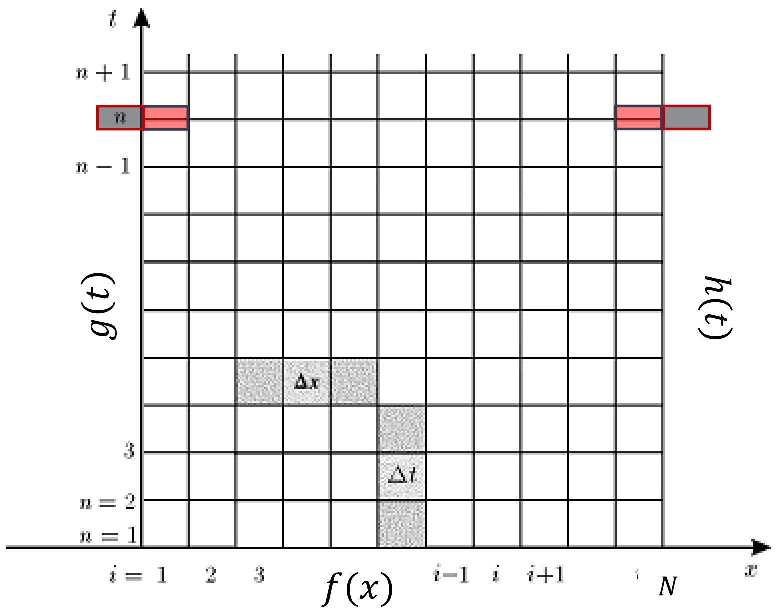
$$\boxed{\begin{cases}\bar{\phi}_0^n = 2g(t_n) - \bar{\phi}_1^n\\ \bar{\phi}_{N+1}^n = 2h(t_n) - \bar{\phi}_N^n\end{cases}}$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i-1}^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_i^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i+1}^n = -\bar{\phi}_i^{n-1} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_0^n - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_1^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_2^n = -\bar{\phi}_1^{n-1}$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(2g(t_n) - \bar{\phi}_1^n) - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_1^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_2^n = -\bar{\phi}_1^{n-1}$$

$$-\left(1 + \frac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_1^n + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_2^n = -\bar{\phi}_1^{n-1} - \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}g(t_n)$$



حجم محدود

روش ضمنی اویلر – شرط مرزی دیریشله

روش سلول مجازی

$$-\left(1+\frac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_1^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_2^n=-\bar{\phi}_1^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}g(t_n)$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n-\left(1+\frac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n=-\bar{\phi}_N^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}h(t_n)$$

$$\begin{bmatrix}-\left(1+\frac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\phi}_1^n\\ \bar{\phi}_2^n\\ \bar{\phi}_3^n\\ \vdots\\ \bar{\phi}_{N-1}^n\\ \bar{\phi}_N^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\bar{\phi}_1^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}g(t_n)\\ -\bar{\phi}_2^{n-1}\\ -\bar{\phi}_3^{n-1}\\ \vdots\\ -\bar{\phi}_{N-1}^{n-1}\\ -\bar{\phi}_N^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}h(t_n)\end{bmatrix}$$

معادلات سهموی

روش ضمنی اویلر – شرط مرزی نیومن

روش سلول مجازی

$$BC:\begin{cases}\phi(0,t)=g(t)\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(l,t)=h(t)\end{cases}$$

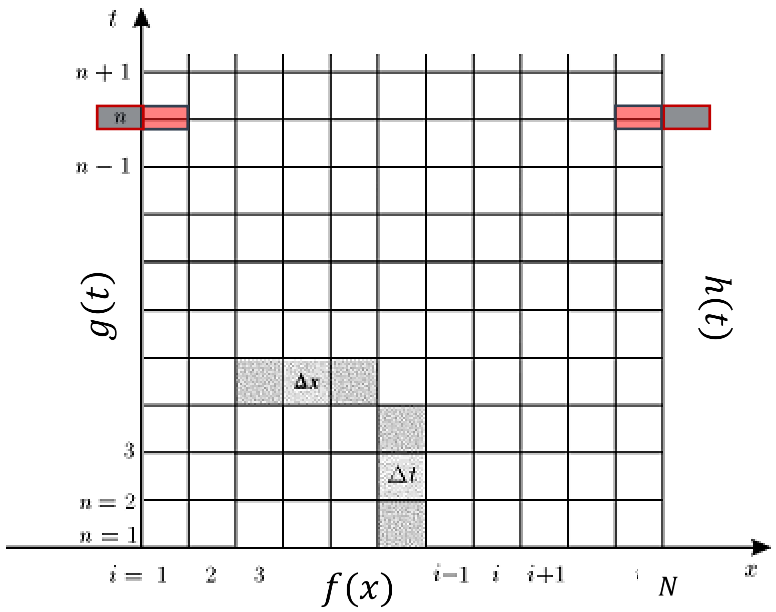
$$\begin{cases}\bar{\phi}_0^n=2g(t_n)-\bar{\phi}_1^n\\ \bar{\phi}_{N+1}^n=h(t_n)\Delta x+\bar{\phi}_N^n\end{cases}$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i-1}^n-\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_i^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{i+1}^n=-\bar{\phi}_i^{n-1}+O(\Delta t,\Delta x^2)$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n-\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N+1}^n=-\bar{\phi}_N^{n-1}$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n-\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(h(t_n)\Delta x+\bar{\phi}_N^n\right)=-\bar{\phi}_N^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n-\left(1+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n=-\bar{\phi}_N^{n-1}-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}h(t_n)}$$



روش ضمنی اویلر – شرط مرزی نیومن

روش سلول مجازی یا اعمال مستقیم شرط مرزی

$$-\left(1+\frac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_1^n+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_2^n=-\bar{\phi}_1^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}g(t_n)$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\bar{\phi}_{N-1}^n-\left(1+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\bar{\phi}_N^n=-\bar{\phi}_N^{n-1}-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}h(t_n)$$

$$\begin{bmatrix} -\left(1+\frac{3\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & & \\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & \\ & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ & & & & \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & -\left(1+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\phi}_1^n\\ \bar{\phi}_2^n\\ \bar{\phi}_3^n\\ \vdots\\ \bar{\phi}_{N-1}^n\\ \bar{\phi}_N^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\bar{\phi}_1^{n-1}-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}g(t_n)\\ -\bar{\phi}_2^{n-1}\\ -\bar{\phi}_3^{n-1}\\ \vdots\\ -\bar{\phi}_{N-1}^{n-1}\\ -\bar{\phi}_N^{n-1}-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}h(t_n)\end{bmatrix}$$

روش تفاضل یکطرفه: سه قطری نخواهد شد

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_{e,i}=\frac{\bar{\phi}_{i-2}-3\bar{\phi}_{i-1}+\bar{\phi}_i}{\Delta x}+O(\Delta x^2)$$

معادلات دو بعدی (در مکان)

خوش وضع:

- ✓ شرط اولیه (روی مقدار تابع)
- ✓ شرایط مرزی

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\qquad \begin{matrix}0\le x\le l_1\\ 0\le y\le l_2\end{matrix}\qquad t\ge 0$$

$$IC:\phi(x,y,0)=f(x,y)$$

$$BC:\begin{cases}\phi(0,y,t)=g(y,t)\\ \phi(l_1,y,t)=h(y,t)\\ \phi(x,l_2,t)=v(x,t)\end{cases}$$

$$BC:\frac{\partial\phi}{\partial x}(l_1,y,t)=h(y,t)$$

$$BC:a\phi(l_1,y,t)+b\frac{\partial\phi}{\partial x}(l_1,y,t)=h(y,t)$$

معادلات دو بعدی (در مکان)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) \qquad \begin{gathered} 0 \le x \le l_1 \\ 0 \le y \le l_2 \end{gathered} \qquad t \ge 0$$

تفاضل محدود

$$\frac{\mathrm{d}\phi_{i,j}}{\mathrm{d}t}\bigg|^{t_n} = \alpha\left(\frac{\phi_{i,j-1}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{i-1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i+1,j}^n}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi_{i,j}}{\mathrm{d}t}\bigg|^{t_n} = \begin{cases} \dfrac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} \\ \\ \dfrac{\phi_{i,j}^{n} - \phi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \end{cases}$$

روش صریح اویلر	شرط پایداری	$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \le \frac{1}{2}$
روش ضمنی اویلر	بدون شرط پایدار	

حجم محدود

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\phi}_{i,j}}{\mathrm{d}t}\bigg|^{t_n} = \alpha\left(\frac{\bar{\phi}_{i,j-1}^n - 2\bar{\phi}_{i,j}^n + \bar{\phi}_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} + \frac{\bar{\phi}_{i-1,j}^n - 2\bar{\phi}_{i,j}^n + \bar{\phi}_{i+1,j}^n}{\Delta x^2}\right)$$

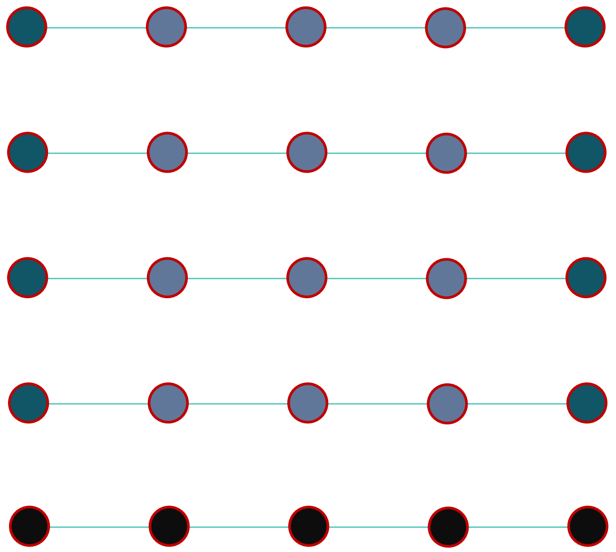
معادلات سهموی

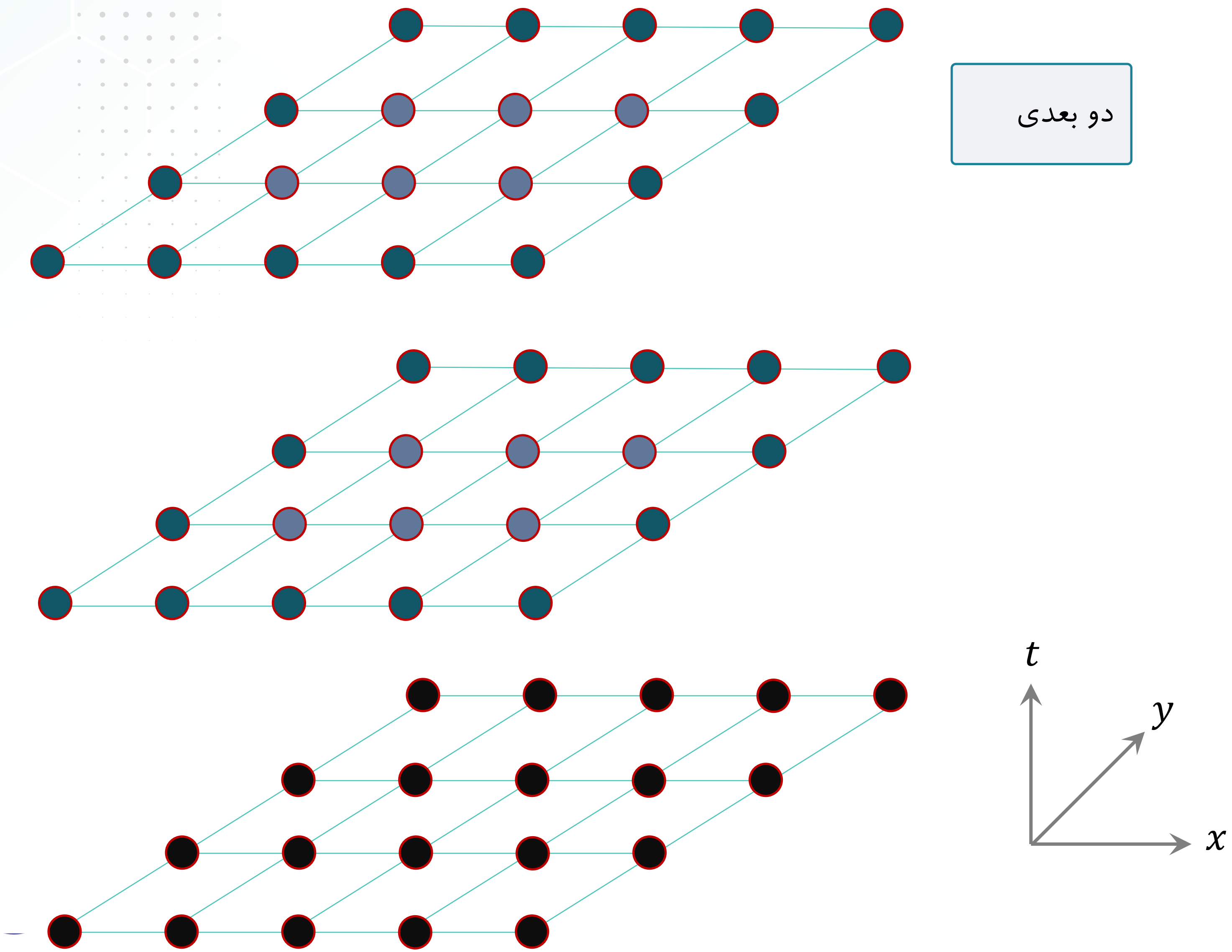
معادلات دو بعدی (در مکان)

مراحل حل

یک بعدی

دو بعدی





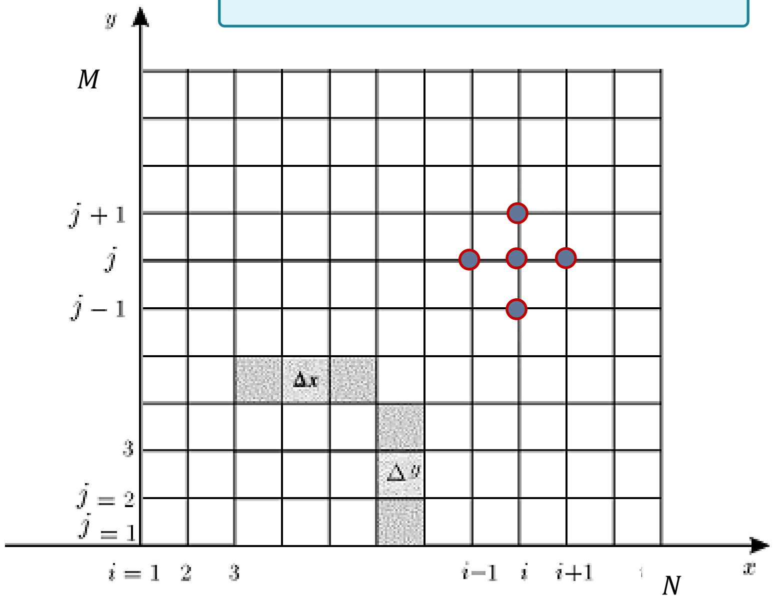
معادلات سهموی

معادلات دو بعدی (در مکان)

تفاضل محدود، روش ضمنی اویلر

$$\frac{\phi_{i,j}^{n}-\phi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}=\alpha\left(\frac{\phi_{i,j-1}^{n}-2\phi_{i,j}^{n}+\phi_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^{2}}+\frac{\phi_{i-1,j}^{n}-2\phi_{i,j}^{n}+\phi_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^{2}}\right)$$

$$r_x\phi_{i-1,j}^{n}+r_x\phi_{i+1,j}^{n}-(1+2r_x+2r_y)\phi_{i,j}^{n}+r_y\phi_{i,j-1}^{n}+r_y\phi_{i,j+1}^{n}=-\phi_{i,j}^{n-1}$$



برای نقاط غیر مرزی:

$$r_x=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^{2}}\qquad r_y=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^{2}}\qquad r=1+2r_x+2r_y$$

$$\begin{bmatrix}-r & r_x & & & & r_y & & & \\ r_x & -r & r_x & & & & \ddots & & \\ & r_x & -r & r_x & & & & r_y & \\ & & r_x & -r & r_x & & & & r_y \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ r_y & & & & r_x & -r & r_x & & \\ & \ddots & & & & r_x & -r & r_x & \\ & & r_y & & & & r_x & -r & r_x \\ & & & r_y & & & & r_x & -r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{1,1}^{n}\\ \phi_{2,1}^{n}\\ \phi_{3,1}^{n}\\ \vdots\\ \phi_{N-1,M}^{n}\\ \phi_{N,M}^{n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{1,1}^{n}\\ R_{2,1}^{n}\\ R_{3,1}^{n}\\ \vdots\\ R_{N-1,M}^{n}\\ R_{N,M}^{n}\end{bmatrix}$$

ماتریس پنج قطری

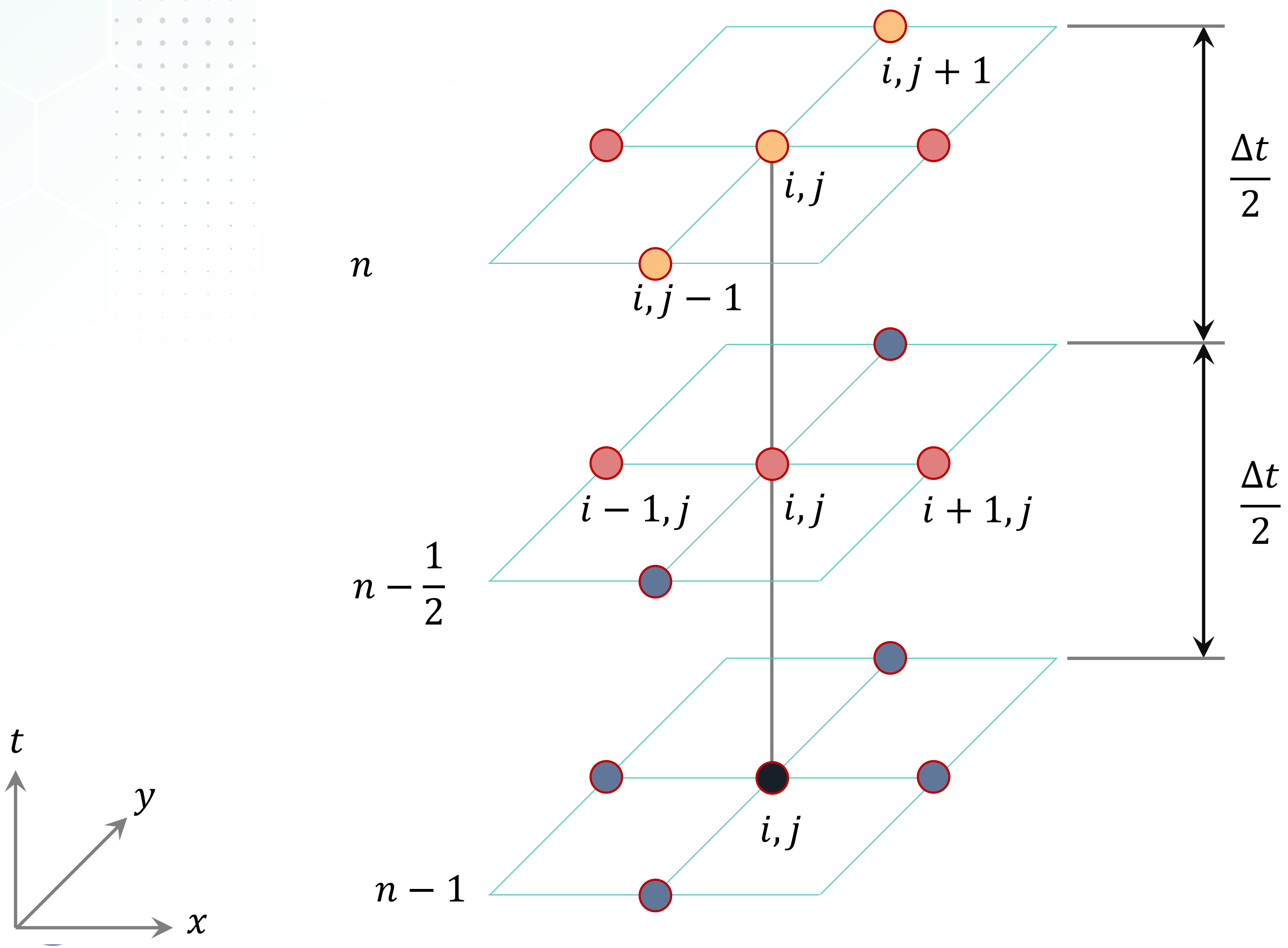
$$R_{i,j}^{n}=\begin{cases}?\,(B.C.), & i=1,N \text{ or } j=1,M\\ -\phi_{i,j}^{n-1}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

معادلات دو بعدی (در مکان)

تفاضل محدود

روش ضمنی جهت متناوب، ADI

(Alternating-Direction Implicit)



معادلات دو بعدی (در مکان)

تفاضل محدود، روش ADI

گام زمانی اول

$$\frac{\phi_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}-\phi_{i,j}^{n-1}}{\Delta t/2}=\alpha\left(\frac{\phi_{i,j-1}^{n-1}-2\phi_{i,j}^{n-1}+\phi_{i,j+1}^{n-1}}{\Delta y^2}+\frac{\phi_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}}-2\phi_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}+\phi_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{r_x}{2}\phi_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}}-(1+r_x)\phi_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}+\frac{r_x}{2}\phi_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}}=-\frac{r_y}{2}\phi_{i,j-1}^{n-1}-(1-r_y)\phi_{i,j}^{n-1}-\frac{r_y}{2}\phi_{i,j+1}^{n-1}$$

دستگاه سه قطری

$$\begin{bmatrix} -(1+r_x) & \frac{r_x}{2} & & & & \\ \frac{r_x}{2} & -(1+r_x) & \frac{r_x}{2} & & & \\ & \frac{r_x}{2} & -(1+r_x) & \frac{r_x}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{r_x}{2} & -(1+r_x) & \frac{r_x}{2} \\ & & & & \frac{r_x}{2} & -(1+r_x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{1,1}\\ \phi_{2,1}\\ \phi_{3,1}\\ \vdots\\ \phi_{N-1,N}\\ \phi_{N,N}\end{bmatrix}^{n-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}R_{1,1}\\ R_{2,1}\\ R_{3,1}\\ \vdots\\ R_{N-1,N}\\ R_{N,N}\end{bmatrix}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$R_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}=\begin{cases} ?\,(B.C.), & i=1,N \text{ or } j=1,M \\ -\frac{r_y}{2}\phi_{i,j-1}^{n-1}-(1-r_y)\phi_{i,j}^{n-1}-\frac{r_y}{2}\phi_{i,j+1}^{n-1}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

→ لزوم اصلاح ماتریس ضرایب

→ لزوم سازگاری با بردار مجهولات

معادلات دو بعدی (در مکان)

تفاضل محدود، روش ADI

گام زمانی دوم

$$\frac{\phi_{i,j}^{n}-\phi_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t/2}=\alpha\left(\frac{\phi_{i,j-1}^{n}-2\phi_{i,j}^{n}+\phi_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2}+\frac{\phi_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}}-2\phi_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}+\phi_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{r_y}{2}\phi_{i,j-1}^{n}-(1+r_y)\phi_{i,j}^{n}+\frac{r_y}{2}\phi_{i,j+1}^{n}=-\frac{r_x}{2}\phi_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}}-(1-r_x)\phi_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{r_x}{2}\phi_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix}-(1+r_y) & \frac{r_y}{2} & & & & \\ \frac{r_y}{2} & -(1+r_y) & \frac{r_y}{2} & & & \\ & \frac{r_y}{2} & -(1+r_y) & \frac{r_y}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{r_y}{2} & -(1+r_y) & \frac{r_y}{2} \\ & & & & \frac{r_y}{2} & -(1+r_y)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{1,1}\\ \phi_{1,2}\\ \phi_{1,3}\\ \vdots\\ \phi_{N,N-1}\\ \phi_{N,N}\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}R_{1,1}\\ R_{1,2}\\ R_{1,3}\\ \vdots\\ R_{N,N-1}\\ R_{N,N}\end{bmatrix}^{n}$$

دستگاه سه قطری

$$R_{i,j}^{n}=\begin{cases}?\,(B.C.), & i=1,N \text{ or } j=1,M \\ -\frac{r_x}{2}\phi_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}}-(1-r_x)\phi_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}-\frac{r_x}{2}\phi_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$\longrightarrow$ لزوم اصلاح ماتریس ضرایب

$\longrightarrow$ لزوم سازگاری با بردار مجهولات

معادلات سهموی

معادلات دو بعدی (در مکان)

تفاضل محدود، روش ADI:

- ✓ دقت زمانی: $O(\Delta t^2)$
- ✓ پایدار در این مسئله

حجم محدود، روش ADI:

- ✓ روند مشابه و روابط نسبتا مشابه در این مسئله
- ✓ لزوم توجه به شرایط مرزی حتی در این مسئله

معادلات سه بعدی (در مکان)

روش ADI:

- ✓ گام زمانی: $\Delta t/3$
- ✓ دقت زمانی: $O(\Delta t)$

پایداری و سازگاری

تعریف خطا و عدم قطعیت

خطا

یک نقصان قابل تشخیص در شناسایی رفتار یک سیستم یا شبیه‌سازی آن که ناشی از کمبود دانش نیست.

$$\phi_{\mathrm{num}} - \phi_{\mathrm{exact}} = \varepsilon$$

$$\phi - \phi_{\mathrm{e}} = \varepsilon$$

انواع خطای عددی:

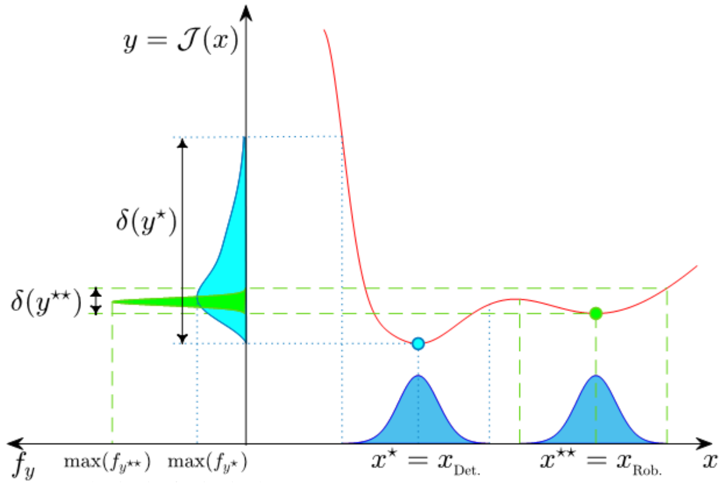
- ✓ خطای بریدگی (Truncation Error)
- ✓ خطای گرد کردن (Round off Error)
- ✓ خطای گسسته‌سازی (Discretization Error)

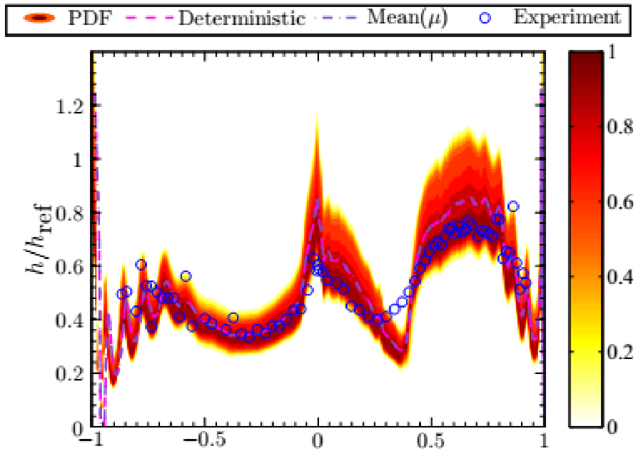
عدم قطعیت

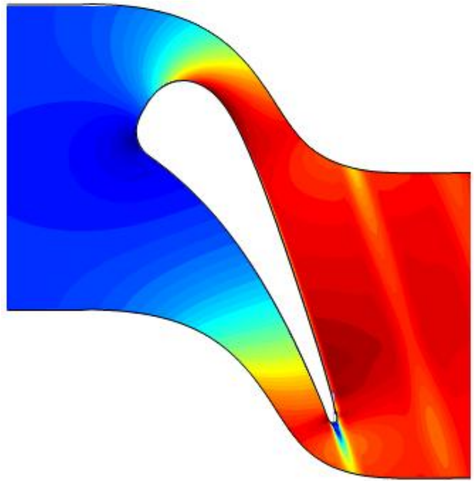
یک نقصان بالقوه در رفتار یک سیستم یا پیش‌بینی آن که عموما ناشی از کمبود دانش (حتی دانش فرضی) است.

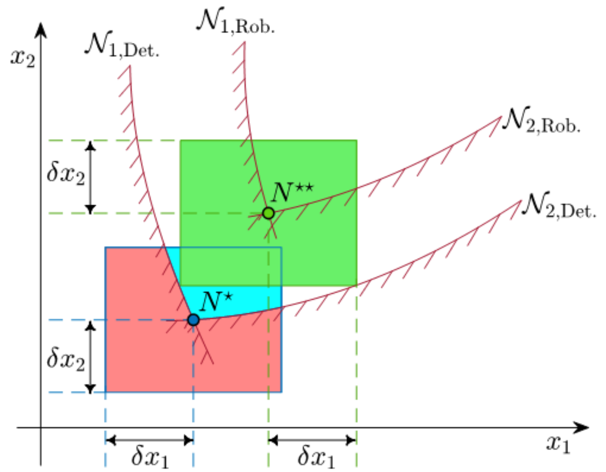
پایداری و سازگاری

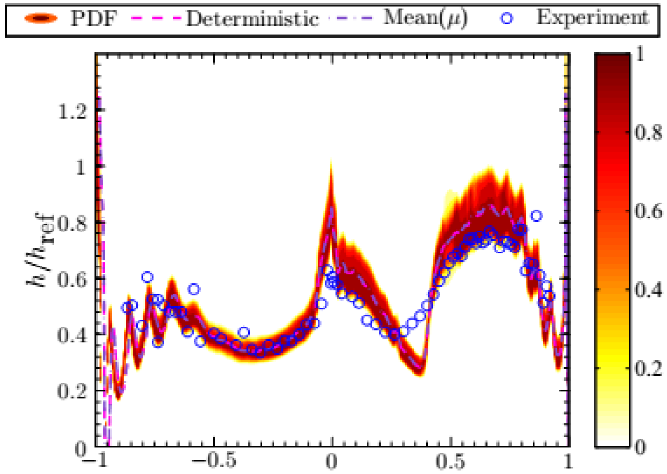
عدم قطعیت

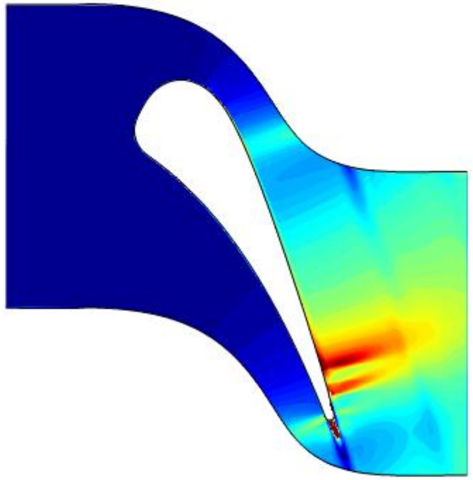












دانشگاه صنعتی شریف

پایداری و سازگاری

تعاریف سازگاری، پایداری، همگرایی

سازگاری

با کوچک شدن گام‌های مکانی و زمانی، رویکرد عددی (معادله گسسته شده) به معادله تحلیلی میل کند.

$$\lim_{\Delta x,\Delta t\to 0} \text{DE} = \text{PDE}$$

پایداری

در اثر گذر زمان (یا شماره تکرار) خطا (گرد کردن) رشد نکند

یا به عبارت دیگر با افزایش زمان به سمت بینهایت، خطا محدود باقی بماند.

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\text{num}} - \phi_{\text{exact}} \le K \quad \text{for finite } \Delta t$$

همگرایی

با کوچک شدن گام‌های مکانی و زمانی، پاسخ عددی در یک نقطه و لحظه مشخص به حل تحلیلی میل کند.

$$\lim_{\Delta x,\Delta t\to 0} \phi_{\text{num}}\Big|_i^n = \phi_{\text{exact}}\Big|_i^n$$

شرط همگرایی:

- ✓ سازگاری
- ✓ پایداری

سازگاری

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{\phi_{i+1}^n-2\phi_i^n+\phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\phi_{i+1}^n=\phi_i^n+(\phi_x)_i^n\,\Delta x+\frac{(\phi_{xx})_i^n}{2!}\Delta x^2+\frac{(\phi_{xxx})_i^n}{3!}\Delta x^3+O(\Delta x^4)$$

$$\phi_i^{n+1}=\phi_i^n+(\phi_t)_i^n\,\Delta t+\frac{(\phi_{tt})_i^n}{2!}\Delta t^2+\frac{(\phi_{ttt})_i^n}{3!}\Delta t^3+O(\Delta t^4)$$

$$\phi_{i-1}^n=\phi_i^n-(\phi_x)_i^n\,\Delta x+\frac{(\phi_{xx})_i^n}{2!}\Delta x^2-\frac{(\phi_{xxx})_i^n}{3!}\Delta x^3+O(\Delta x^4)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\underbrace{\phi_i^n+(\phi_t)_i^n\,\Delta t+\frac{(\phi_{tt})_i^n}{2!}\Delta t^2+\frac{(\phi_{ttt})_i^n}{3!}\Delta t^3+O(\Delta t^4)}_{\phi_i^{n+1}}-\phi_i^n\right]=$$

$$\frac{\alpha}{\Delta x^2}\Bigg[\underbrace{\phi_i^n+(\phi_x)_i^n\,\Delta x+\frac{(\phi_{xx})_i^n}{2!}\Delta x^2+\frac{(\phi_{xxx})_i^n}{3!}\Delta x^3+O(\Delta x^4)}_{\phi_{i+1}^n}-2\phi_i^n+$$

$$\underbrace{\phi_i^n-(\phi_x)_i^n\,\Delta x+\frac{(\phi_{xx})_i^n}{2!}\Delta x^2-\frac{(\phi_{xxx})_i^n}{3!}\Delta x^3+O(\Delta x^4)}_{\phi_{i-1}^n}\Bigg]$$

$$\left[\phi_t+\frac{\phi_{tt}}{2}\Delta t+O(\Delta t^2)\right]$$

$$=\alpha[\phi_{xx}+O(\Delta x^2)]$$

$$\Delta x\to 0$$

$$\Delta t\to 0$$

سازگاری

$$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^{n-1}}{2\Delta t}=\alpha\frac{\phi_{i+1}^{n}-(\phi_i^{n+1}+\phi_i^{n-1})+\phi_{i-1}^{n}}{\Delta x^2}$$

$$\left[1+2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right]\phi_i^{n+1}=\left[1-2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right]\phi_i^{n-1}+2\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^{n}+\phi_{i-1}^{n})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\ \Delta t^2+O(\Delta t^3)=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ \Delta x^2+\ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\ O(\Delta x^4)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\alpha\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\ =\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ +\ O(\Delta t^2,\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\ =\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\ +\ O\left[\Delta t^2,\Delta x^2,\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right]$$

$$\Delta x\to 0$$

$$\Delta t\to 0$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\to 0$$

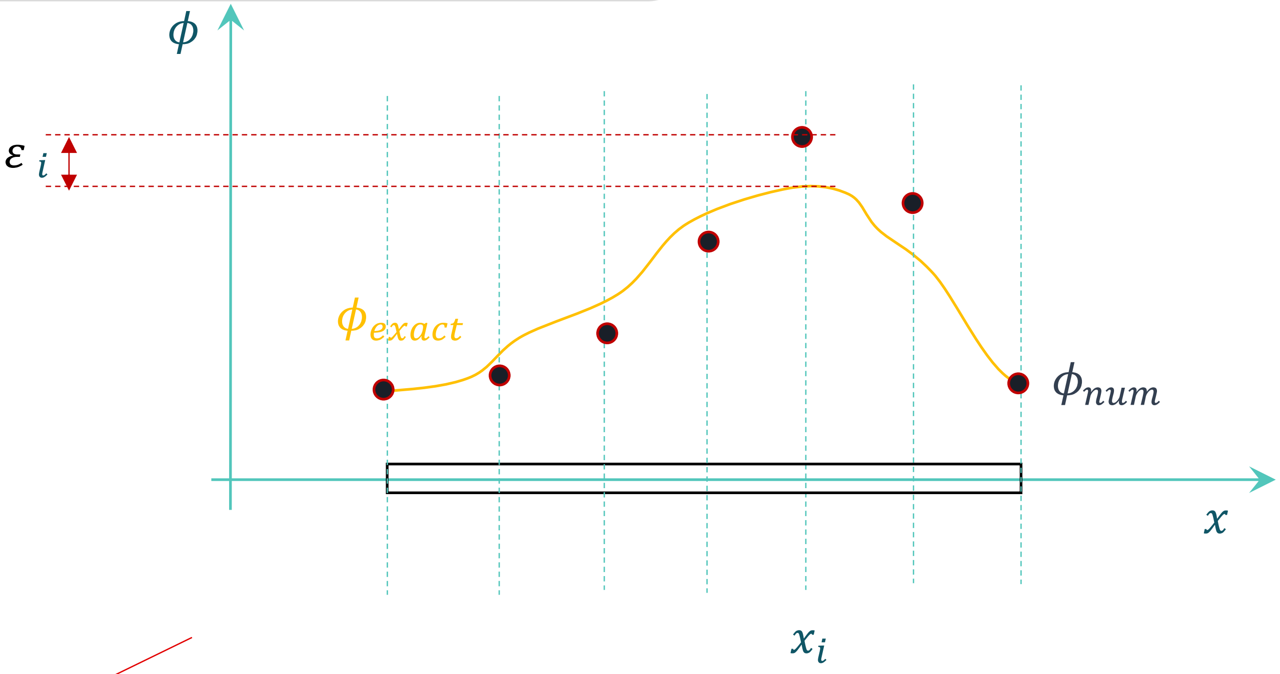
خطای بریدگی

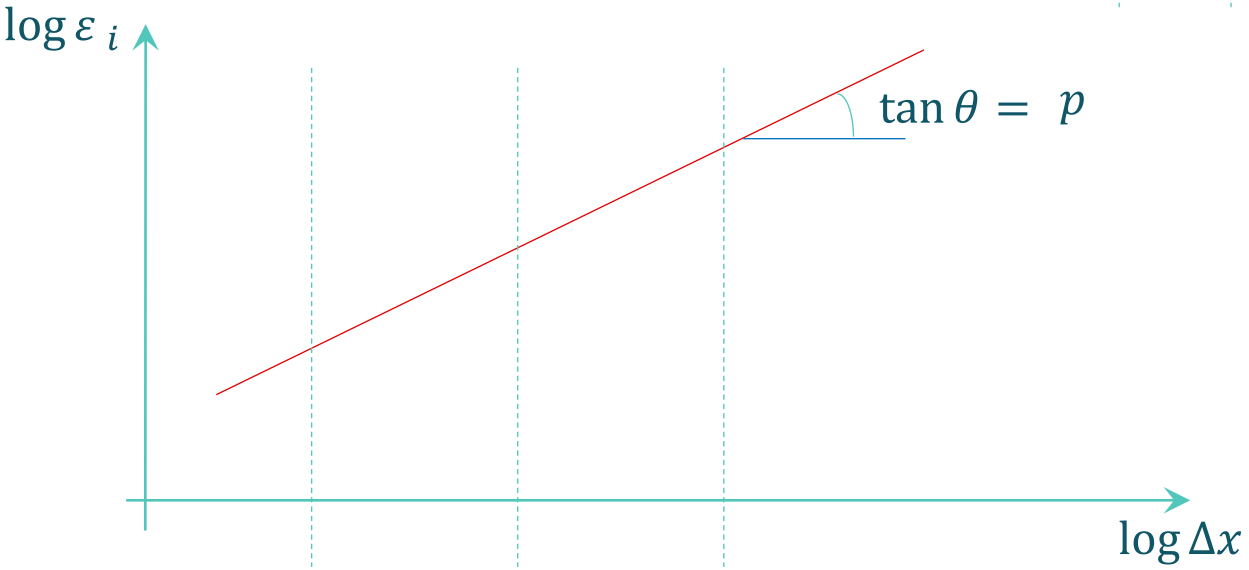
$$\varepsilon_i = |\phi_{i,exact} - \phi_{i,num}| = O(\Delta x^{p})$$

مرتبه دقت

$$\varepsilon_i = K\Delta x^p$$

$$\log \varepsilon_i = \log K + p \log \Delta x$$





$$\Delta x_1 < \Delta x_2 < \Delta x_3$$

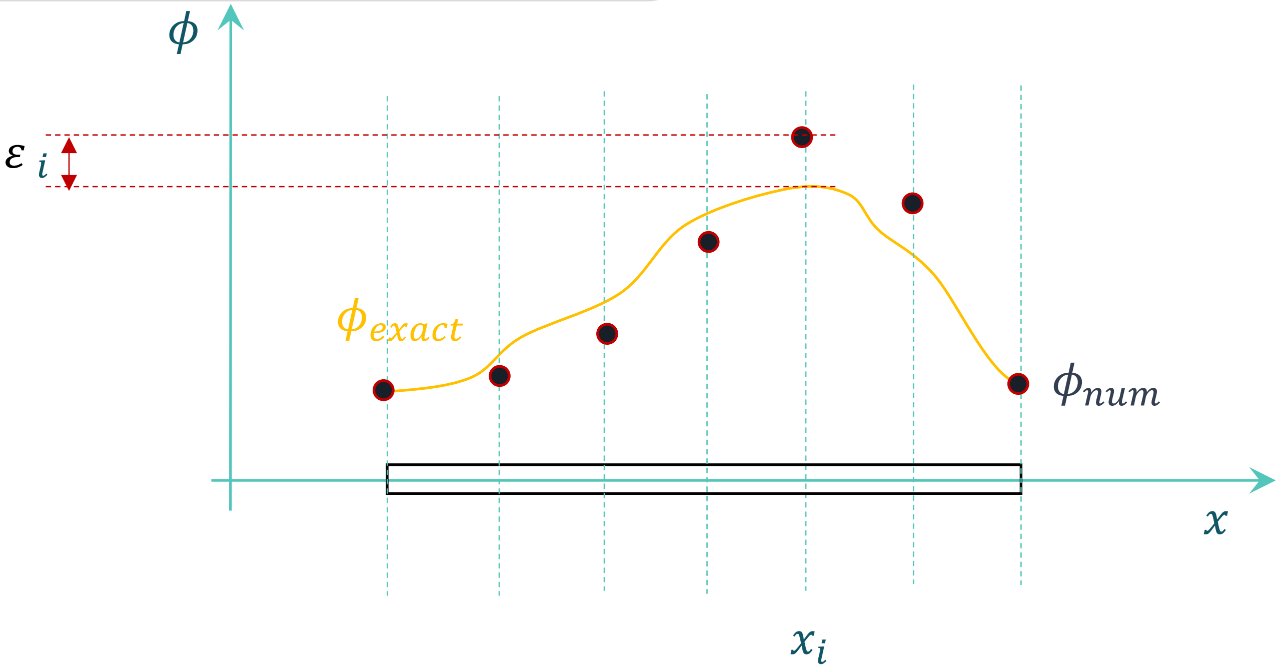
خطای بریدگی

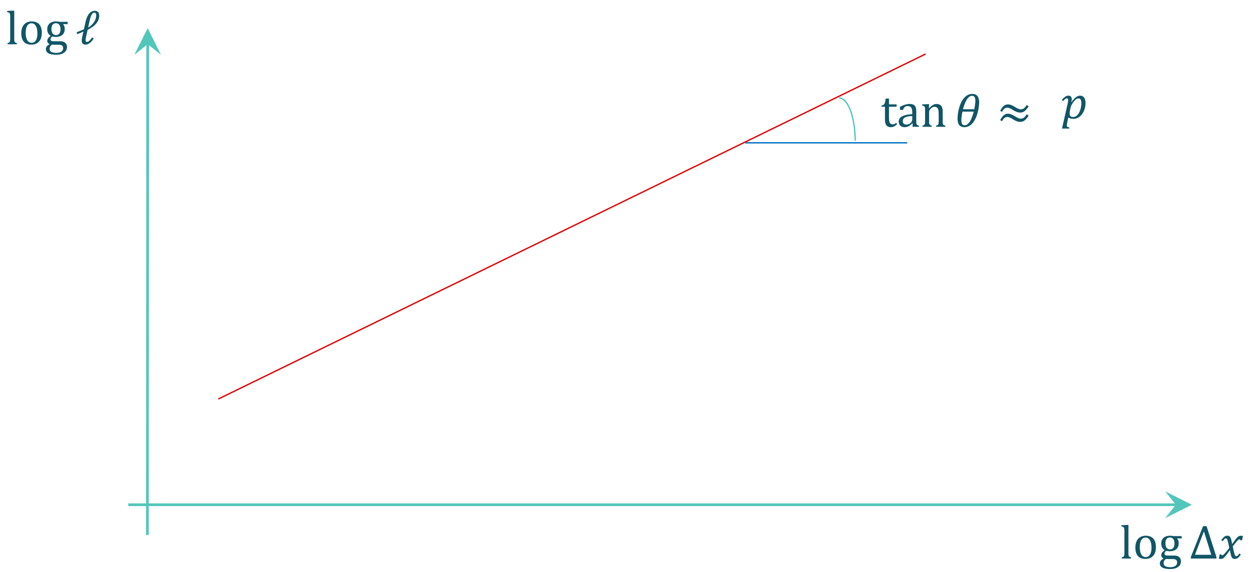
$$\boxed{\ell_q - norm = \left(\frac{\sum |\varepsilon_i|^q}{N}\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$\ell_1 = \frac{\sum \varepsilon_i}{N}$$

$$\ell_2 = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N}}$$

$$\ell_\infty = \max\{\varepsilon_i\}$$





پایداری و سازگاری

خطای گسسته‌سازی

تخمین خطای گسسته‌سازی

۱. انتخاب سه شبکه به اندازه‌کافی متفاوت که به صورت نظام‌یافته ریز شده‌اند.

شبکه ۱: شبکه ریز

شبکه ۲: شبکه متوسط

شبکه ۳: شبکه درشت

ϕ: هر کمیت مورد علاقه برای بررسی (نقطه‌ای یا انتگرالی)

$$\varepsilon_{21} = \phi_2 - \phi_1$$

$$\varepsilon_{32} = \phi_3 - \phi_2$$

$$|\varepsilon_{21}, \varepsilon_{32}| > 0$$

۲. محاسبه معیار اندازه شبکه

$$h(\text{cell}_i) = \Delta x_i$$

$$h(\text{cell}_i) = (\Delta A_i)^{\frac{1}{2}}$$

$$h(\text{cell}_i) = (\Delta V_i)^{\frac{1}{3}}$$

برای کمیت‌های انتگرالی

$$h = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i$$

$$h = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta A_i\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$h = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta V_i\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{h_1 < h_2 < h_3}$$

خطای گسسته‌سازی

تخمین خطای گسسته‌سازی

۳. محاسبه مرتبه دقت

به صورت سعی و خطا

$$p = \frac{1}{\ln r_{21}}\left|\ln\left|\frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}}\right| + q\right|$$

$$q = \ln\left(\frac{r_{21}^{p} - s}{r_{32}^{p} - s}\right) \qquad s = \operatorname{sgn}\left(\frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}}\right)$$

$$r_{21} = \frac{h_2}{h_1} \qquad r_{32} = \frac{h_3}{h_2}$$

به صورت تجربی : $r > 1.3$

$$\text{if } r_{21} = r_{32} \rightarrow p = \frac{1}{\ln r_{21}}\left|\ln\left|\frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}}\right|\right|$$

پایداری و سازگاری

خطای گسسته‌سازی

تخمین خطای گسسته‌سازی

۴. محاسبه مقدار برون‌یابی شده

(تقریبا بدون خطای گسسته‌سازی)

$$\phi_{\text{ext},21} = \frac{\phi_1 r_{21}^p - \phi_2}{r_{21}^p - 1}$$

۵. محاسبه خطای نسبی گسسته‌سازی

خطای تقریبی

$$e_{\text{a},21} = \left| \frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_1} \right|$$

خطای برون‌یابی شده

$$e_{\text{ext},21} = \left| \frac{\phi_1 - \phi_{\text{ext},21}}{\phi_{\text{ext},21}} \right|$$

عدم قطعیت مش ریز

(اندیس همگرایی شبکه)

$$\text{GCI}_1 = \frac{1.25 e_{\text{a},21}}{r_{21}^p - 1}$$

خطای گرد کردن

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

ϕ_e : ϕ_{exact}

ϕ : $\phi_{numerical}$

$$\phi_n - \phi_e = \varepsilon \qquad \phi_e = \phi - \varepsilon$$

شرط پایداری: محدود بودن ε_i^n

$$\frac{\partial(\phi - \varepsilon)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2(\phi - \varepsilon)}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + T.E.$$

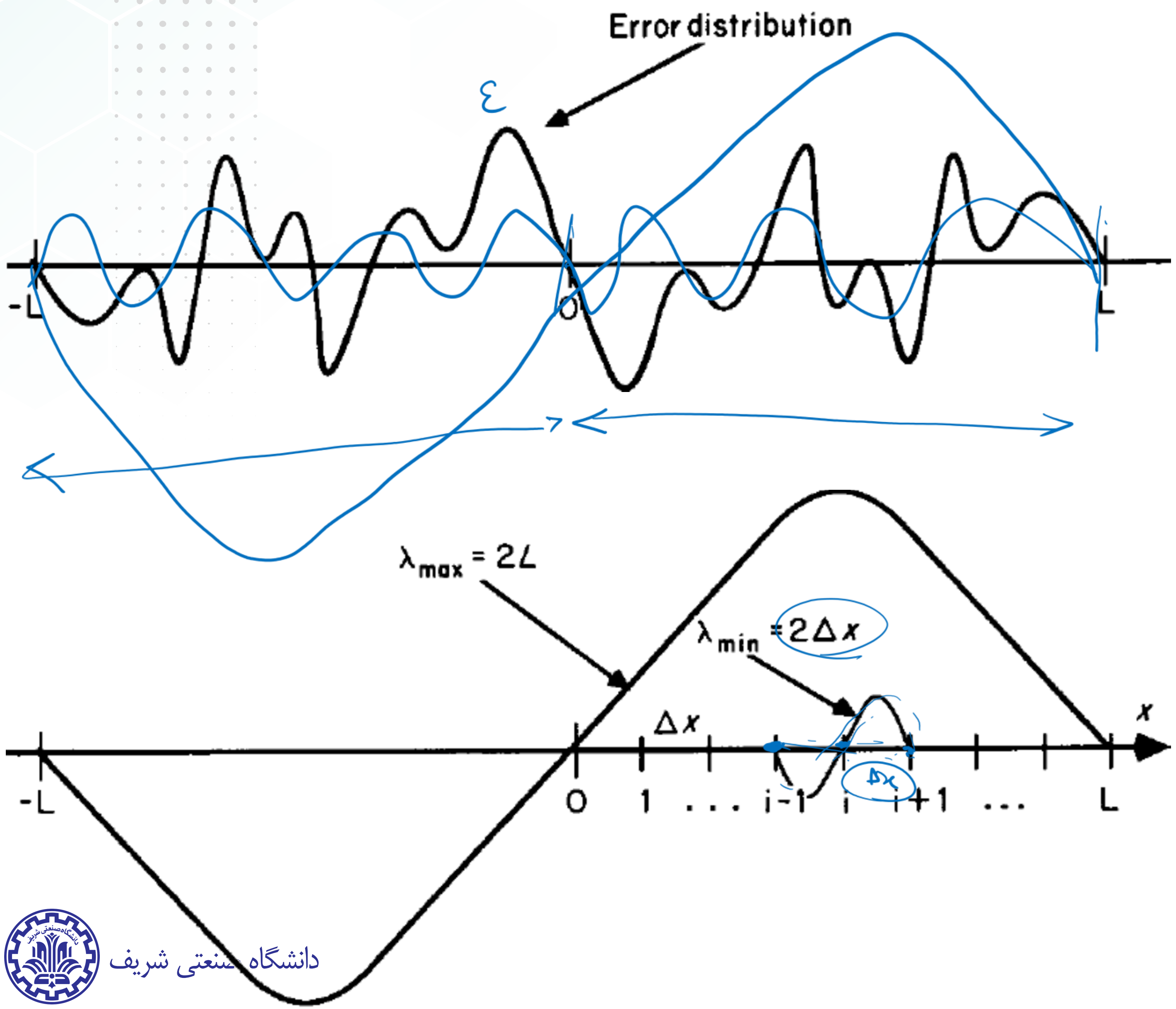
$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2} \qquad \frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

سیر رشد خطا نیز همانند سیر رشد تابع پاسخ است

اگر معادله PDE خطی باشد یا صورت گسسته‌شده، خطی‌سازی شده باشد خطا نیز در معادله DE صدق می‌کند

پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری به روش فون نیومن



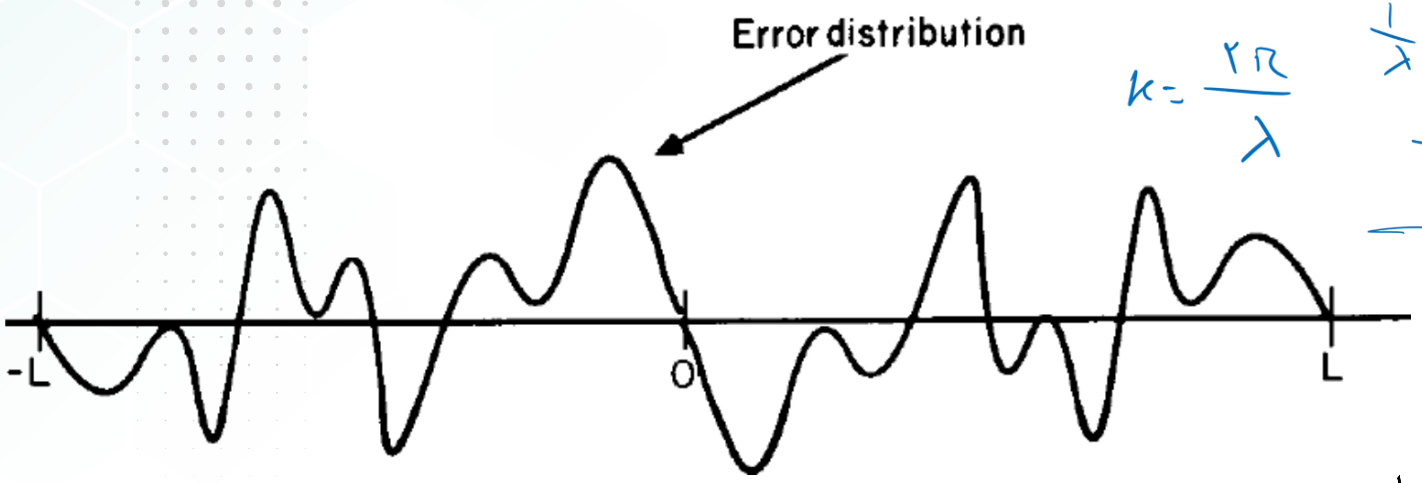
* اگر شرایط مرزی periodic باشد ← بسط فوریه

* اگر بازه [0,L] ←

در بازه [-L,0] از تقارن استفاده می‌کنیم

بعد از به صورت Periodic بسط می‌دهیم

تحلیل پایداری به روش فون نیومن



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\frac{1}{\lambda}$

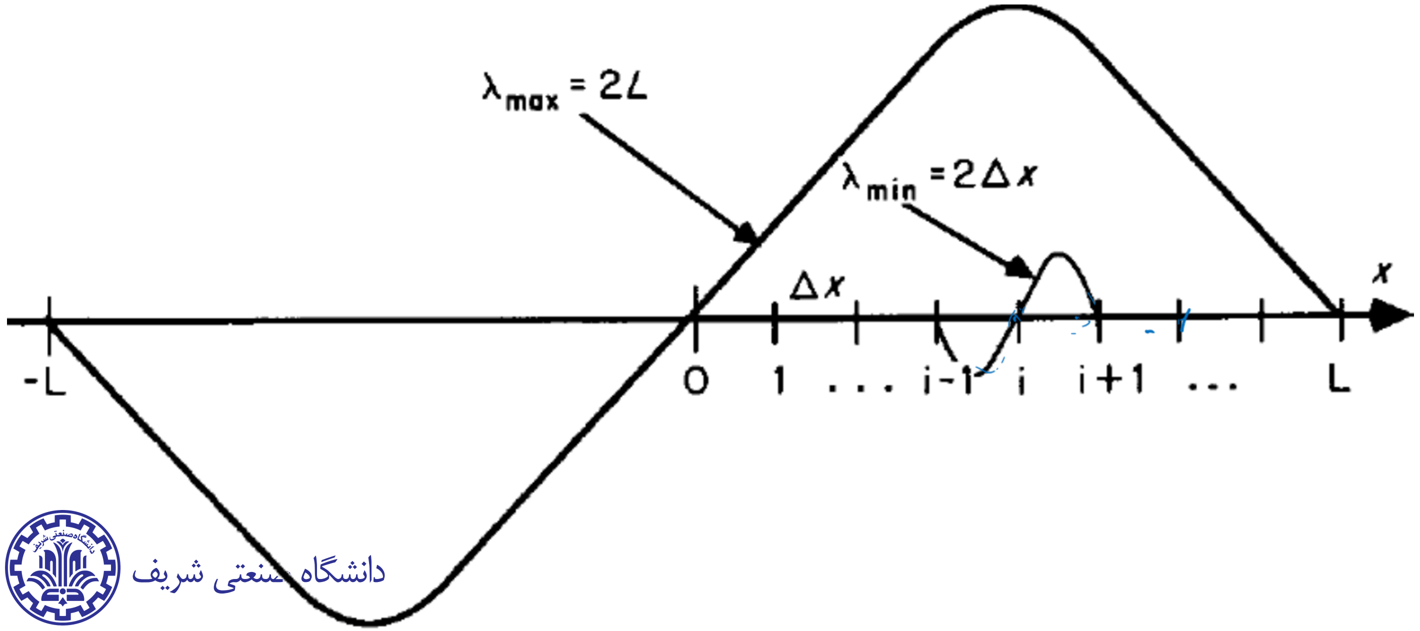
- کوچکترین طول موج: $\lambda_{min} = 2\Delta x$
- بزرگ‌ترین عدد موج: $k_{max} = \pi/\Delta x$
- بزرگ‌ترین طول موج: $\lambda_{max} = 2L$
- کوچک‌ترین عدد موج: $k_{min} = \pi/L$
- سایر طول موج و عدد موج‌ها: به ازای سایر ابعاد مش‌ها

$$1 \leq i \leq N$$

$$x_i = i\,\Delta x, \qquad \Delta x = L/N$$

$$k_i = ik_{min} = \frac{i\pi}{L} = \frac{i\pi}{N\,\Delta x}$$

$$\frac{N\pi}{N\Delta x}$$



تحلیل پایداری به روش فون نیومن

- هر تابع پاسخ یا خطا در هر نقطه را می‌توان به صورت بسط فوریه به صورت زیر نوشت:

$$\phi_i^n = \underbrace{\sum_j \omega_j^n e^{Ik_j.x_i}} = \sum_j \omega_j^n e^{Ik_j.i\Delta x}$$

عدد موج

$k_j = \frac{j\pi}{N\Delta x}$, $\cancel{i\Delta x}$

- به علت خطی بودن PDE یک هارمونیک $\omega^n e^{Ik.x}$ سیر رشد مشابه ϕ_i^n دارد

$$\phi_i^n = \sum_j \omega_j^n e^{I\frac{ij\pi}{N}}$$

$\phi(x,t) = \omega_j^n e^{Ikx}$

$\varepsilon = \omega^n$

$\phi_i^n = \phi(x,t) = \sigma^n e^{ikx}$

$\frac{\omega^{n+1}}{\omega^n} = \sigma$

$\frac{\omega^n}{\omega^n} = 1$

$\phi_i^n = \sigma^n e^{ikx}$ $\quad \sigma < 1$

پایداری مسئله کاملا گسسته

ضریب بزرگنمایی (Amplification factor)

$$|\sigma| = \left|\frac{\omega_i^{n+1}}{\omega_i^n}\right| = \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right|$$

- ✓ پایدار $\quad \sigma \le 1$
- ✓ ناپایدار $\quad \sigma > 1$

تحلیل پایداری به روش فون نیومن

❖ روش Explicit Euler

FTCS

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_i^n = \alpha \frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\Big|_i^n$$

$$\phi_i^n = \sigma^n e^{Ikx}$$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right)$$

$$\frac{\sigma^{n+1} e^{Ikx_i} - \sigma^n e^{Ikx_i}}{\sigma^n e^{Ikx_i}} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \times \left[\frac{\sigma^n e^{Ikx_{i+1}} - 2\sigma^n e^{Ikx_i} + \sigma^n e^{Ikx_{i-1}}}{\sigma^n e^{Ikx_i}}\right]$$

$$\longrightarrow \sigma - 1 = r_x\left(e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x}\right)$$

$$e^{Ik\Delta x} = Cos k\Delta x + I sin k\Delta x$$

$$e^{-Ik\Delta x} = Cos k\Delta x - I sin k\Delta x$$

$$\sigma = 1 - 2r_x(1 - Cos k\Delta x)$$

$$|\sigma| \leq 1$$

$$|1 - 2r_x(1 - Cosk\Delta x)| \leq 1 \longrightarrow -1 \leq 1 - 2r_x(1 - Cosk\Delta x) \leq 1$$

$$\longrightarrow -2 \leq -2r_x(1 - Cosk\Delta x) \leq 0 \longrightarrow -1 \leq -r_x(1 - Cosk\Delta x) \leq 0$$

$$2Sin^2\frac{k\Delta x}{2}$$

$$0 \leq -4r_x Sin^2\frac{k\Delta x}{2} \leq 2$$

$$4r_x \leq 2 \longrightarrow |\sigma| \leq 1$$

$$0 \leq Sin^2\frac{k\Delta x}{2} \leq 1$$

$$r_x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow$$ روش E.E پایدار خواهد بود.

❖ روش Implicit Euler　　BTCS

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_i^n = \alpha \frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\Big|_i^n$$

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right) \qquad \phi_i^n = \sigma^n e^{Ikx}$$

$$\longrightarrow \frac{\sigma^n e^{Ikx_i} - \sigma^{n-1} e^{Ikx_i}}{\sigma^{n-1} e^{Ikx_i}} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \times \left[\frac{\sigma^n e^{Ikx_{i+1}} - 2\sigma^n e^{Ikx_i} + \sigma^n e^{Ikx_{i-1}}}{\sigma^{n-1} e^{Ikx_i}}\right]$$

$$\longrightarrow \sigma - 1 = r_x\left(\sigma e^{Ik\Delta x} - 2\sigma + \sigma e^{-Ik\Delta x}\right)$$

$$\longrightarrow 1 - \frac{1}{\sigma} = r_x\left(e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x}\right) = -2r_x(1 - Cosk\Delta x)$$

$$1-\frac{1}{\sigma}=-2r_x(1-Cosk\Delta x) \longrightarrow \frac{1}{\sigma}=1+2r_x(1-Cosk\Delta x)$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sigma}=1+2r_x\times 2\,Sin^2\frac{k\Delta x}{2}=\underbrace{1+\underbrace{4r_x\underbrace{Sin^2\frac{k\Delta x}{2}}_{\geq 0}}_{\geq 0}}_{\geq 1} \longrightarrow \frac{1}{\sigma}\geq 1$$

$$\longrightarrow \sigma\leq 1$$

در این روش اندازه بزرگنمایی همواره کمتر از ۱ است. $\longrightarrow$ Unconditionally Stable

روش I.E بدون شرط پایدار خواهد بود.

❖ روش Crank Nicolson

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big|_i^{n+\frac{1}{2}} = \alpha \frac{\partial \phi^2}{\partial x^2}\Big|_i^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{2\Delta x^2}\left[\left(\phi_{i+1}^{n+1} - 2\phi_i^{n+1} + \phi_{i-1}^{n+1}\right) + \left(\phi_{i+1}^{n} - 2\phi_i^{n} + \phi_{i-1}^{n}\right)\right]$$

$$\phi_i^n = \sigma^n e^{Ikx}$$

$$\sigma - 1 = \frac{r_x}{2}\left[\left(\sigma e^{Ik\Delta x} - 2\sigma + \sigma e^{-Ik\Delta x}\right) + \left(e^{Ik\Delta x} - 2 + e^{-Ik\Delta x}\right)\right]$$

$$\sigma - 1 = -r_x\sigma(1 - Cosk\Delta x) - r_x(1 - Cosk\Delta x)$$

$$\longrightarrow \quad \sigma[1 + r_x(1 - Cosk\Delta x)] = 1 - r_x(1 - Cosk\Delta x)$$

تحلیل پایداری به روش فون نیومن

$$\sigma = \frac{1 - r_x(1 - Cos k\Delta x)}{[1 + r_x(1 - Cos k\Delta x)]} = \frac{\overbrace{1 - \overbrace{\frac{r_x}{2} Sin^2 \frac{k\Delta x}{2}}^{\geq 0}}^{\leq 1}}{\underbrace{1 + \underbrace{\frac{r_x}{2} Sin^2 \frac{k\Delta x}{2}}_{\geq 0}}_{\geq 1}} \rightarrow \sigma \leq 1$$

در این روش اندازه بزرگنمایی همواره کمتر از ۱ است. ← Unconditionally Stable

روش Crank-Nicolson بدون شرط پایدار خواهد بود.

تحلیل پایداری به روش فون نیومن

❖ معادله انتقال حرارت دو بعدی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

$$\phi_{i,j}^n = \sigma^n e^{Ikx} e^{Iky} \longrightarrow$$ روش Simple Explicit $$\longrightarrow \left| r_x + r_y \right| \le \frac{1}{2}$$

$$r_x = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \qquad r_y = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}$$

تحلیل پایداری به روش فون نیومن

❖ معادله موج:

دو بعدی $$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

یک بعدی $$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -c\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

FTCS $$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = -c\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\phi_i^n = \sigma^n e^{Ikx} \longrightarrow \sigma - 1 = -\frac{CFL}{2}\times\left(e^{IK\Delta x} - e^{-Ik\Delta x}\right)$$

$$e^{Ik\Delta x} = Cosk\Delta x + Isink\Delta x$$

$$\boxed{CFL = \frac{c\Delta t}{\Delta x}} \longrightarrow \sigma - 1 = -\frac{CFL}{2}\times(2Isink\Delta x)$$

$$\longrightarrow \sigma = 1 - CFL\times(Isin\Delta x)$$

$$\longrightarrow |\sigma| = \sqrt{1 + CFL^2\sin^2 k\Delta x} \geq 1$$

Unconditionally Unstable

تحلیل پایداری به روش فون نیومن

Upwind: $$\frac{\phi_i^{n+1}-\phi_i^n}{\Delta t} = -c\,\frac{\phi_i^n-\phi_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$\sigma - 1 = -CFL \times \left(1 - e^{-Ik\Delta x}\right)$$

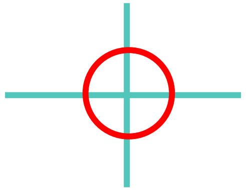
$$\longrightarrow \quad \sigma = 1 - CFL \times (1 - Cos\; k\Delta x) - CFL\; Isink\Delta x$$

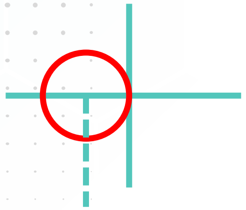
یک راه: $$|\sigma| \le 1 \longrightarrow \sigma^2 \le 1 \longrightarrow \sigma^2 - 1 \le 0$$

راه استفاده از نمودار:

$$\sigma - 1 = CFL(Cos\, k\Delta x - 1) - CFL\, I sink\Delta x$$

$|\sigma| \leq 1$ ← σ یک دایره به شعاع مرکز واحد است. ← $\sigma - 1$ به اندازه یک واحد در محور حقیقی جابه‌جا می‌شود.

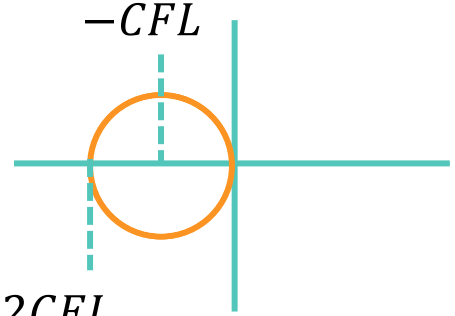




$$\sigma - 1 = \xi + I\eta \qquad \xi = CFL(Cos\, k\Delta x - 1) \qquad \eta = -CFL\, sink\Delta x$$

$$\longrightarrow (\xi + CFL)^2 + \eta^2 = CFL^2$$

پس این معادله یک دایره به مرکز $-CFL$ و شعاع CFL است.



❖ اگر $CFL \leq 1$ باشد دایره نارنجی داخل دایره قرمز قرار گرفته و حل پایدار می‌باشد.

تحلیل پایداری به روش فون نیومن

Second Order Upwind → $CFL \le \frac{1}{2}$

First order upwind ← دقت مرتبه ۱ شرط پایداری $CFL \le 1$

Second order upwind ← دقت مرتبه ۲ شرط پایداری $CFL \le \frac{1}{2}$

روش First Order پایدارتر

High Resolution Scheme

تحلیل پایداری

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{\phi}}}{dt} = B \times \vec{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \alpha \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

$$B \times \psi^{(j)} = \lambda_j \times \psi^{(j)}$$

$$\left| B_{N\times N)} - \Lambda \times I \right| = 0$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \lambda_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_{N-1} & \\ & & & & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & & & & \psi_1^{(N)} \\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & & & & \\ & & \psi_i^{(j)} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \psi_N^{(1)} & & & & & \psi_N^{(N)} \end{bmatrix}$$

$$B \times \Psi = \Psi \times \Lambda$$

$$\Psi^{-1} \times B \times \Psi = \Lambda$$

تحلیل پایداری

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{dt}} = B \times \vec{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\Psi^{-1} \times \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{dt}} = \Psi^{-1} \times B \times \vec{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\Psi^{-1} \times \vec{\boldsymbol{\phi}}\right)}{\mathrm{dt}} = \Psi^{-1} \times B \times \Psi \times \Psi^{-1} \times \vec{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\Psi^{-1} \times B \times \Psi = \Lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}\left(\Psi^{-1} \times \vec{\boldsymbol{\phi}}\right)}{\mathrm{dt}} = \Lambda \times \Psi^{-1} \times \vec{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\Psi^{-1} \times \vec{\boldsymbol{\phi}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{dt}} = \Lambda \times \vec{\boldsymbol{\omega}}}$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i \omega_i \qquad \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \lambda_i \varepsilon_i$$

$$\omega_i = \omega_i^0 e^{\lambda_i t} \qquad \varepsilon_i = \varepsilon_i^0 e^{\lambda_i t}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$$

شرط پایداری در صورت عدم گسسته‌سازی زمانی

پایداری مسئله کاملا گسسته

ضریب بزرگنمایی
(Amplification factor)

$$|\sigma| = \left|\frac{\omega_i^{n+1}}{\omega_i^n}\right| = \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right|$$

✓ پایدار $\sigma \leq 1$

✓ ناپایدار $\sigma > 1$

پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری

معادله حرارت گذرا

شرط مرزی متناوب (Periodic)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad t \geq 0 \qquad \phi(x+l) = \phi(x)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \alpha \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \qquad \phi_{i+N} = \phi_i$$

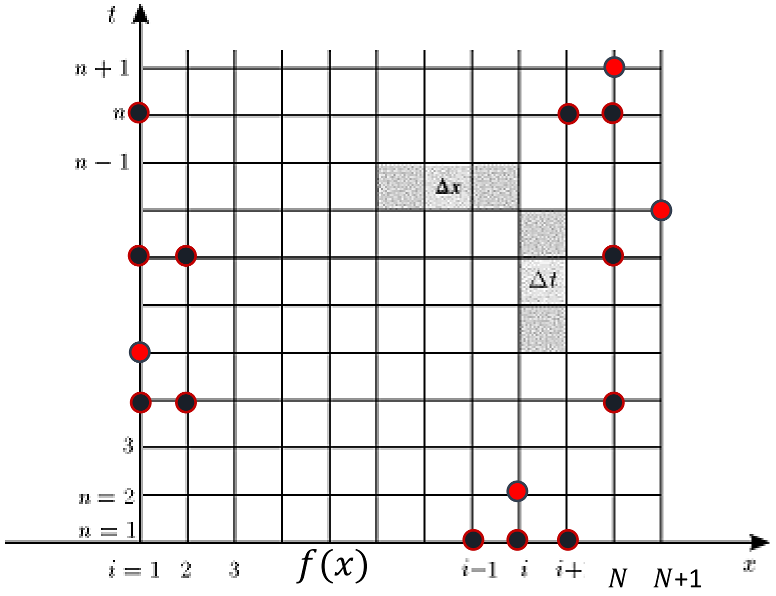
$$\begin{cases} a_{-1} = a_1 = \dfrac{\alpha}{\Delta x^2} \\ a_0 = -2\dfrac{\alpha}{\Delta x^2} \end{cases}$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = a_{-1}\phi_{i-1} + a_0\phi_i + a_1\phi_{i+1}$$

$$\frac{d\phi_1}{dt} = a_{-1}\phi_N + a_0\phi_1 + a_1\phi_2$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = a_{-1}\phi_1 + a_0\phi_2 + a_1\phi_3$$

$$\frac{d\phi_N}{dt} = a_{-1}\phi_{N-1} + a_0\phi_N + a_1\phi_1$$



پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری

ماتریس نواری (Band matrix)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \vdots\\ \phi_{N-1}\\ \phi_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & & & & a_{-1}\\ a_{-1} & a_0 & a_1 & & & \\ & a_{-1} & a_0 & a_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{-1} & a_0 & a_1\\ a_1 & & & & a_{-1} & a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \vdots\\ \phi_{N-1}\\ \phi_N\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{d}t}=B\times\vec{\boldsymbol{\phi}} \qquad B=B(a_{-1},a_0,a_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \vdots\\ \phi_{N-1}\\ \phi_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & & a_{-2} & a_{-1}\\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & & a_{-2}\\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & & \\ & a_{-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_2\\ a_2 & & & a_{-1} & a_0 & a_1\\ a_1 & a_2 & & a_{-2} & a_{-1} & a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \vdots\\ \phi_{N-1}\\ \phi_N\end{bmatrix}$$

$$B=B(\dots,a_{-2},a_{-1},a_0,a_1,a_2,\dots)$$

حجم محدود $\frac{\mathrm{d}\vec{\vec{\boldsymbol{\phi}}}}{\mathrm{d}t}=B\times\vec{\vec{\boldsymbol{\phi}}}$

سایر شرط‌های مرزی $\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{d}t}=B\times\vec{\boldsymbol{\phi}}+D$

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

$$B = B(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$\lambda_j = \sum_k a_k e^{kIw_j} \qquad \psi^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{Iw_j} \\ e^{2w_j} \\ \vdots \\ e^{(N-1)w_j} \end{bmatrix} \qquad I^2 = -1 \qquad w_j = \frac{2\pi(j-1)}{N}$$

معادله حرارت یک بعدی گذرا

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad a_{-1} = a_1 = \frac{\alpha}{\Delta x^2}, a_0 = -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}$$

$$\lambda_j = a_{-1} e^{-Iw_j} + a_0 e^0 + a_1 e^{Iw_j}$$

$$\lambda_j = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\left(\cos w_j - I \sin w_j\right) - 2\frac{\alpha}{\Delta x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\cos w_j + I \sin w_j\right)$$

$$\boxed{\lambda_j = -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(1 - \cos w_j\right)}$$

پایداری و سازگاری

شرط پایداری: محدود بودن خطای گرد کردن ε_i^n

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\phi - \phi_{\mathrm{e}} = \varepsilon$$

$$\boxed{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}}$$

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \alpha\frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\phi}}}{\mathrm{d}t} = B \times \vec{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\vec{\boldsymbol{\phi}} = \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_N\end{bmatrix}$$

$$B = B(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$\frac{d\phi_i}{dt} = a_{-1}\phi_{i-1} + a_0\phi_i + a_1\phi_{i+1}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \lambda_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda_{N-1} & \\ & & & & & \lambda_N\end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix}\psi_1^{(1)} & \psi_1^{(2)} & & & & \psi_1^{(N)}\\ \psi_2^{(1)} & \psi_2^{(2)} & & & & \\ & & \psi_i^{(j)} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \psi_N^{(1)} & & & & & \psi_N^{(N)}\end{bmatrix}$$

$$\Psi^{-1} \times B \times \Psi = \Lambda$$

بررسی پایداری برای این سیستم ODE

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t} = \Lambda \times \vec{\boldsymbol{\omega}}} \qquad \frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i \omega_i$$

شرط پایداری در صورت عدم گسسته‌سازی زمانی

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \lambda_i \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i = \varepsilon_i^0 e^{\lambda_i t} \qquad Re(\lambda_i) < 0$$

شرط پایداری ω در صورت گسسته‌سازی زمانی

$$|\sigma| = \left|\frac{\omega_i^{n+1}}{\omega_i^n}\right| = \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| \le 1$$

هم ارزی پایداری ω با پایداری ϕ

$$\vec{\boldsymbol{\phi}} = \Psi \times \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

$$B = B(\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$\psi^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{Iw_j} \\ e^{2w_j} \\ \vdots \\ e^{Nw_j} \end{bmatrix} \qquad \lambda_j = \sum_k a_k e^{kIw_j}$$

$$I^2 = -1 \qquad w_j = \frac{2\pi(j-1)}{N}$$

معادله انتقال حرارت گذرا (گسسته‌سازی مرکزی مکان)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\lambda_j = -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(1 - \cos w_j\right)}$$

روش صریح اویلر

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i \omega_i \qquad \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} = \lambda_i \omega_i^n$$

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \lambda_i \varepsilon_i^n \qquad \varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + \lambda_i \Delta t \varepsilon_i^n \qquad \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| = |1 + \lambda_i \Delta t| \le 1$$

$$|1 + (\mathrm{Re}(\lambda_i) + \mathrm{Im}(\lambda_i)\, I)\Delta t| \le 1 \qquad |(1 + \mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t)) + \mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t)\, I| \le 1$$

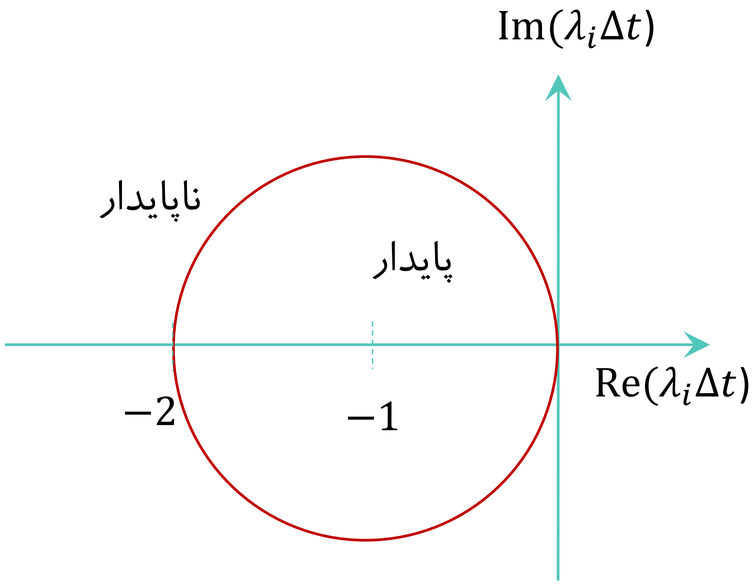
$$\sqrt{(\mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t) + 1)^2 + (\mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t))^2} \le 1$$

$$\xi = \mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t)$$

$$\eta = \mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t)$$

$$\sqrt{(\xi + 1)^2 + \eta^2} \le 1$$

$$\sqrt{\left(\xi - (-1)\right)^2 + \eta^2} \le 1$$



پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش صریح اویلر

معادله حرارت یک بعدی گذرا

(گسسته‌سازی مرکزی مکان)

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i = -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}(1-\cos w_i) \\ &|(1+\mathrm{Re}(\lambda_i\Delta t)) + \mathrm{Im}(\lambda_i\Delta t)\, I| \le 1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &|1+\lambda_i\Delta t| \le 1 \\ &-1 \le 1+\lambda_i\Delta t \le 1 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i = -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}(1-\cos w_i) \\ &0 \le 1-\cos w_i \le 2 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{-4\alpha}{\Delta x^2} \le \lambda_i \le 0$$

$$\frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le \lambda_i\Delta t \le 0$$

$$\left.\begin{aligned} &1-\frac{4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le 1+\lambda_i\Delta t \le 1 \\ &-1 \le 1+\lambda_i\Delta t \le 1 \end{aligned}\right\} \qquad -1 \le 1-\frac{4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \qquad \frac{4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le 2 \qquad \boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}}$$

پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش صریح اویلر

معادله حرارت یک بعدی گذرا
(گسسته‌سازی مرکزی مکان)

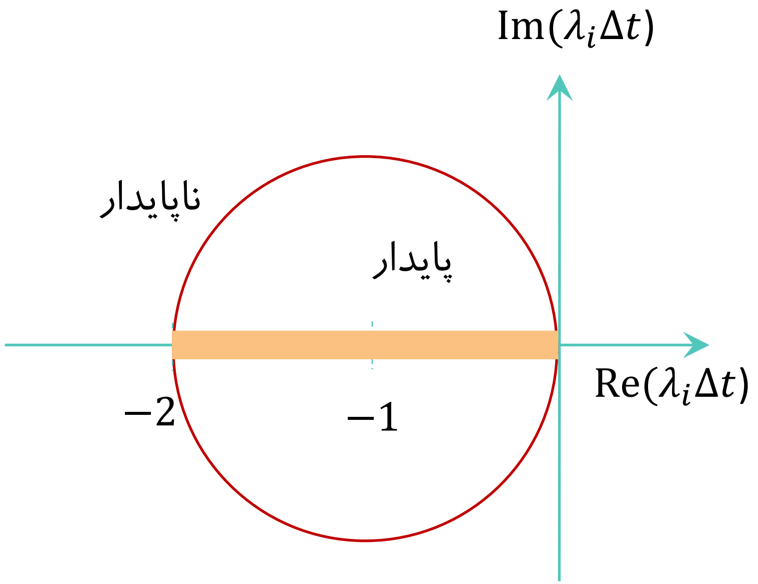
محدوده پایداری اگر تمامی λ_i ها حقیقی باشند

$$-2 \le \lambda_i \Delta t \le 0$$

$$\frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le \lambda_i \Delta t \le 0$$

$$\frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \ge -2$$

$$\boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}}$$



پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش ضمنی اویلر

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i \omega_i \qquad \frac{\omega_i^n - \omega_i^{n-1}}{\Delta t} = \lambda_i \omega_i^n \qquad \frac{\varepsilon_i^n - \varepsilon_i^{n-1}}{\Delta t} = \lambda_i \varepsilon_i^n$$

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\Delta t} = \lambda_i \varepsilon_i^{n+1} \qquad \varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + \lambda_i \Delta t \varepsilon_i^{n+1} \qquad \varepsilon_i^{n+1}(1 - \lambda_i \Delta t) = \varepsilon_i^n \qquad \left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| = \frac{1}{|1 - \lambda_i \Delta t|} \le 1$$

$$|1 - \lambda_i \Delta t| \ge 1$$

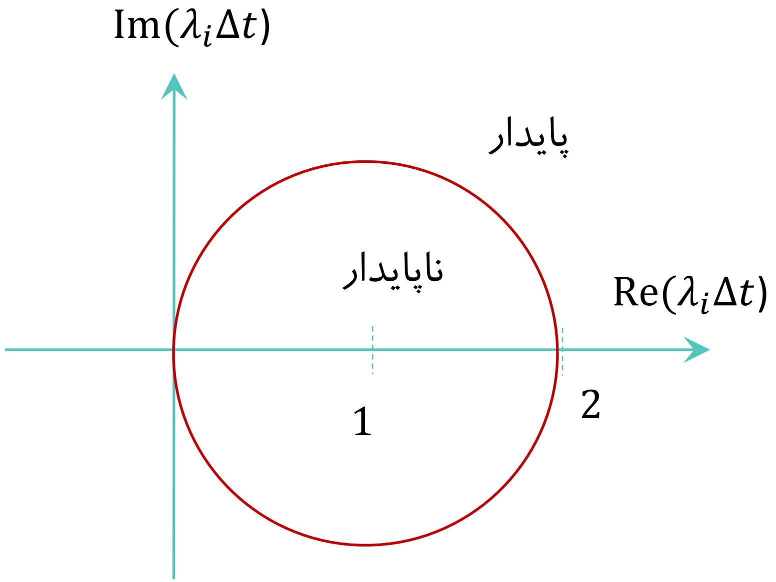
$$|1 - (\mathrm{Re}(\lambda_i) + \mathrm{Im}(\lambda_i)\, I)\Delta t| \ge 1 \qquad |(1 - \mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t)) - \mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t)\, I| \ge 1$$

$$\sqrt{(\mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t) - 1)^2 + (\mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t))^2} \ge 1$$

$$\xi = \mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t)$$

$$\eta = \mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t)$$

$$\sqrt{(\xi - 1)^2 + \eta^2} \ge 1$$



پایداری و سازگاری

روش ضمنی اویلر

معادله حرارت یک بعدی گذرا

(گسسته‌سازی مرکزی مکان)

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}(1-\cos w_i) \\ |(1-\mathrm{Re}(\lambda_i\Delta t)) &- \mathrm{Im}(\lambda_i\Delta t)\,I| \geq 1 \end{aligned}\right\} \qquad |1-\lambda_i\Delta t| \geq 1$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i &= -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}(1-\cos w_i) \\ 0 &\leq 1-\cos w_i \leq 2 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{-4\alpha}{\Delta x^2} \leq \lambda_i \leq 0$$

$$0 \leq -\lambda_i\Delta t \leq \frac{4\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$1 \leq 1-\lambda_i\Delta t \leq 1+\frac{4\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$1 \leq |1-\lambda_i\Delta t| \leq 1+\frac{4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \qquad |1-\lambda_i\Delta t| \geq 1$$

بدون قید و شرط پایدار

پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش ضمنی اویلر

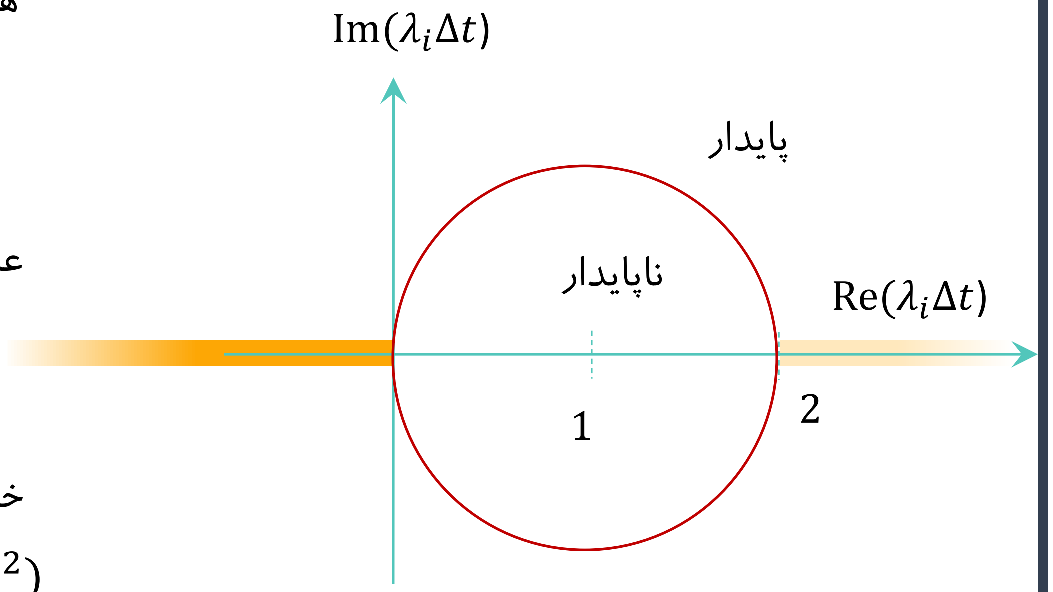
معادله حرارت یک بعدی گذرا
(گسسته‌سازی مرکزی مکان)

همواره پایدار

محدوده پایداری $\begin{cases} \lambda_i \Delta t \leq 0 \\ \lambda_i \Delta t \geq 2 \end{cases}$ اگر تمامی λ_i ها حقیقی باشند

$$\lambda_i = -2\frac{\alpha}{\Delta x^2}(1-\cos w_i) \leq 0$$

عدم رشد نامحدود خطای گرد کردن



خطای بریدگی

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\phi_{i-1}^{n} - \left(1 + \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)\phi_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}\phi_{i+1}^{n} = -\phi_i^{n-1} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش صریح رانج کوتا مرتبه ۲

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i \omega_i \qquad \begin{cases} \dfrac{\omega_i^{n+\frac{1}{2}} - \omega_i^n}{\Delta t/2} = \lambda_i \omega_i^n \\[2ex] \dfrac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} = \lambda_i \omega_i^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \left|\frac{\omega_i^{n+1}}{\omega_i^n}\right| \le 1$$

$$\frac{\omega_i^{n+\frac{1}{2}} - \omega_i^n}{\Delta t/2} = \lambda_i \omega_i^n \quad \rightarrow \omega_i^{n+\frac{1}{2}} - \omega_i^n = \frac{\lambda_i \Delta t}{2}\,\omega_i^n \quad \rightarrow \omega_i^{n+\frac{1}{2}} = \omega_i^n \left(1 + \frac{\lambda_i \Delta t}{2}\right)$$

$$\frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} = \lambda_i \omega_i^{n+\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} = \lambda_i \omega_i^n \left(1 + \frac{\lambda_i \Delta t}{2}\right) \quad \rightarrow \frac{\omega_i^{n+1} - \omega_i^n}{\Delta t} = \lambda_i \omega_i^n \left(1 + \frac{\lambda_i \Delta t}{2}\right)$$

$$\rightarrow \omega_i^{n+1} - \omega_i^n = \omega_i^n \left(\lambda_i \Delta t + \frac{\lambda_i^2 \Delta t^2}{2}\right) \quad \rightarrow \omega_i^{n+1} = \omega_i^n \left(1 + \lambda_i \Delta t + \frac{\lambda_i^2 \Delta t^2}{2}\right) \qquad \left|\frac{\omega_i^{n+1}}{\omega_i^n}\right| = \left|1 + \lambda_i \Delta t + \frac{\lambda_i^2 \Delta t^2}{2}\right|$$

پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش صریح رانج کوتا مرتبه ۲

$$\left|1+\lambda_i\Delta t+\frac{\lambda_i^2\Delta t^2}{2}\right|\le 1$$

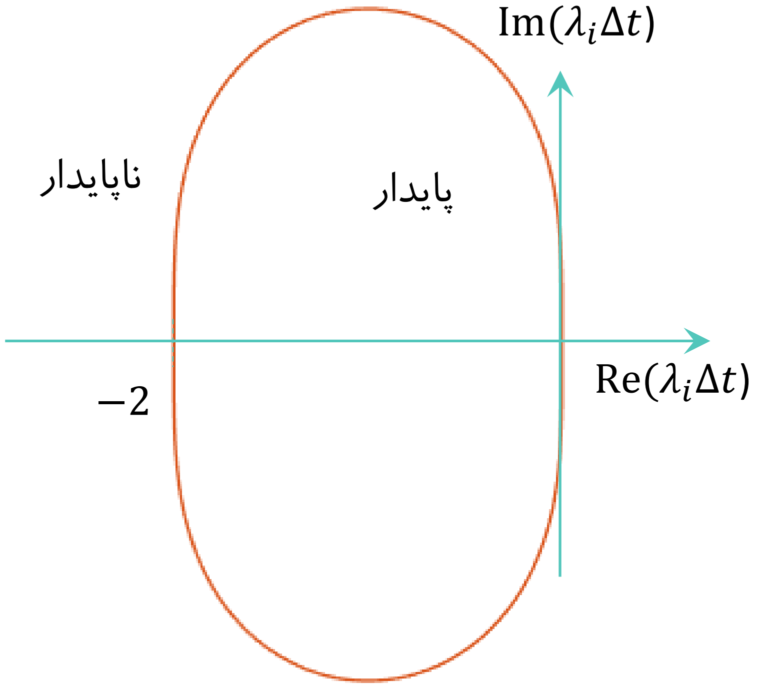
$$\xi=\mathrm{Re}(\lambda_i\Delta t)$$

$$\eta=\mathrm{Im}(\lambda_i\Delta t)$$

$$\lambda_i\Delta t=\xi+\mathrm{I}\,\eta$$

$$\left|1+\xi+\mathrm{I}\,\eta+\frac{\xi^2-\eta^2+2\mathrm{I}\,\xi\eta}{2}\right|\le 1$$

$$\left(1+\xi+\frac{\xi^2}{2}-\frac{\eta^2}{2}\right)^2+(\eta+\xi\eta)^2\le 1$$



پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش RK2

معادله حرارت یک بعدی گذرا

(گسسته‌سازی مرکزی مکان)

$$\left|1+\lambda_i\Delta t+\frac{\lambda_i^2\Delta t^2}{2}\right|\le 1 \xrightarrow{\text{حقیقی } \lambda_i} -1\le 1+\lambda_i\Delta t+\frac{\lambda_i^2\Delta t^2}{2}\le 1$$

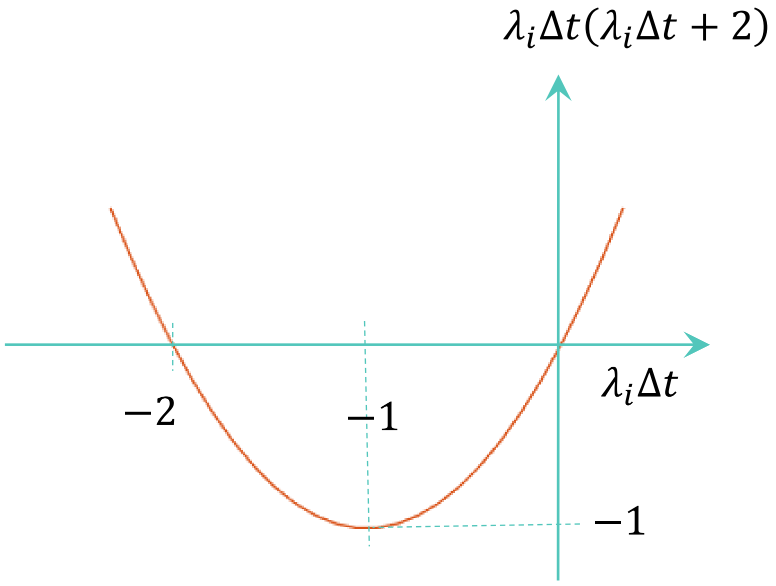
$$\rightarrow -2\le \lambda_i\Delta t+\frac{\lambda_i^2\Delta t^2}{2}\le 0 \qquad \rightarrow -2\le \frac{1}{2}\lambda_i\Delta t(\lambda_i\Delta t+2)\le 0 \qquad \rightarrow -4\le \lambda_i\Delta t(\lambda_i\Delta t+2)\le 0$$

$$\rightarrow -2\le \lambda_i\Delta t\le 0$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_i&=-2\frac{\alpha}{\Delta x^2}(1-\cos w_i)\\ 0&\le 1-\cos w_i\le 2\end{aligned}\right\}\quad \frac{-4\alpha}{\Delta x^2}\le\lambda_i\le 0$$

$$\frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\le\lambda_i\Delta t\le 0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2}&\le\lambda_i\Delta t\le 0\\ -2&\le\lambda_i\Delta t\le 0\end{aligned}\right\}\quad \frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\ge -2 \qquad \boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\le\frac{1}{2}}$$



پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش RK2

معادله حرارت یک بعدی گذرا

(گسسته‌سازی مرکزی مکان)

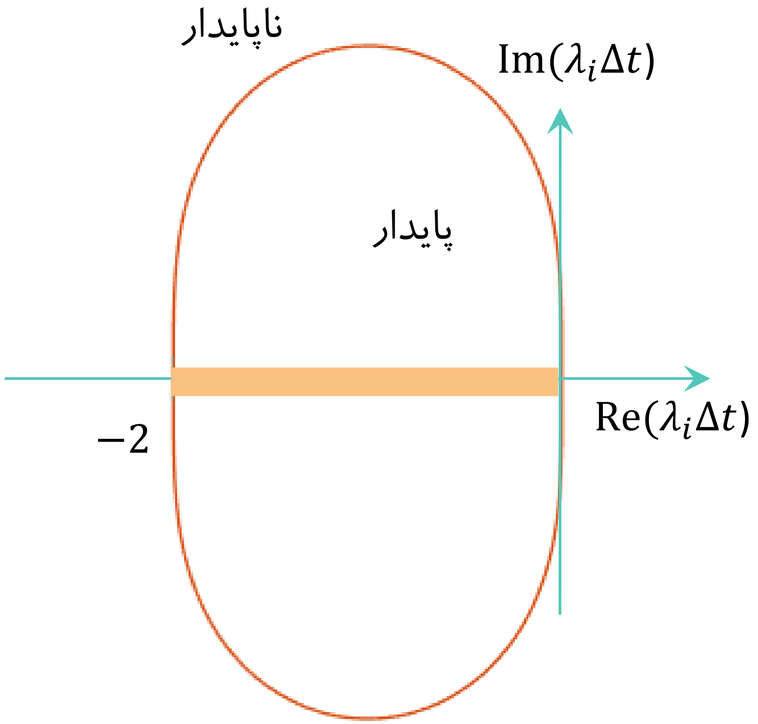
محدوده پایداری اگر تمامی λ_i ها حقیقی باشند

$$-2 \le \lambda_i \Delta t \le 0$$

$$\frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le \lambda_i \Delta t \le 0$$

$$\frac{-4\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \ge -2$$

$$\boxed{\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2}}$$



پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش صریح اویلر

معادله موج یک بعدی

(گسسته‌سازی بادسو مرتبه اول مکان)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} = -\frac{c}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) \qquad \begin{cases} \phi_e = \bar{\phi}_i \\ \phi_w = \bar{\phi}_{i-1} \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} = -\frac{c}{\Delta x}(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}) \qquad a_{-1} = \frac{c}{\Delta x}, a_0 = -\frac{c}{\Delta x}$$

$$\lambda_i = a_{-1}e^{-Iw_i} + a_0 e^0$$

$$\lambda_i = \frac{c}{\Delta x}(\cos w_i - I\sin w_i) - \frac{c}{\Delta x}$$

$$\boxed{\lambda_i = \frac{c}{\Delta x}(\cos w_i - 1 - I\sin w_i)}$$

$$|1 + \lambda_i \Delta t| \le 1 \qquad \lambda_i \Delta t = \frac{c\Delta t}{\Delta x}(\cos w_i - 1 - I\sin w_i)$$

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش صریح اویلر

معادله موج یک بعدی

(گسسته‌سازی بادسو مرتبه اول مکان)

عدد کورانت

$$\mathrm{CFL} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

Courant–Friedrichs–Lewy

$$\lambda_i \Delta t = \mathrm{CFL}(\cos w_i - 1 - I \sin w_i)$$

$$|1 + \lambda_i \Delta t| \leq 1$$

$$|1 + \mathrm{CFL}(\cos w_i - 1 - I \sin w_i)| \leq 1$$

$$|\mathrm{CFL} \cos w_i - \mathrm{CFL}+1 \;\; - I\ \mathrm{CFL} \sin w_i| \leq 1$$

$$(\mathrm{CFL} \cos w_i - \mathrm{CFL} + 1)^2 + (\mathrm{CFL} \sin w_i)^2 \leq 1$$

$$\mathrm{CFL}^2 \cos^2 w_i + \mathrm{CFL}^2 + 1 - 2\mathrm{CFL} - 2\mathrm{CFL}^2 \cos w_i + 2\mathrm{CFL} \cos w_i + \mathrm{CFL}^2 \sin^2 w_i \leq 1$$

$$2\mathrm{CFL}^2 + 1 - 2\mathrm{CFL} - 2\mathrm{CFL}^2 \cos w_i + 2\mathrm{CFL} \cos w_i \leq 1$$

$$2\mathrm{CFL}(\mathrm{CFL} - 1) - 2\mathrm{CFL} \cos w_i (\mathrm{CFL} - 1) \leq 0$$

$$(2\mathrm{CFL} \;\; - 2\mathrm{CFL} \cos w_i)(\mathrm{CFL} - 1) \leq 0$$

$$2\mathrm{CFL}(\mathrm{CFL} - 1)(1 - \cos w_i) \leq 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{CFL}(\mathrm{CFL} - 1)(1 - \cos w_i) \leq 0 \\ &\mathrm{CFL} \geq 0 \\ &1 - \cos w_i \geq 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\mathrm{CFL} \leq 1}$$

پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش صریح اویلر

معادله موج یک بعدی

(گسسته‌سازی بادسو مرتبه اول مکان)

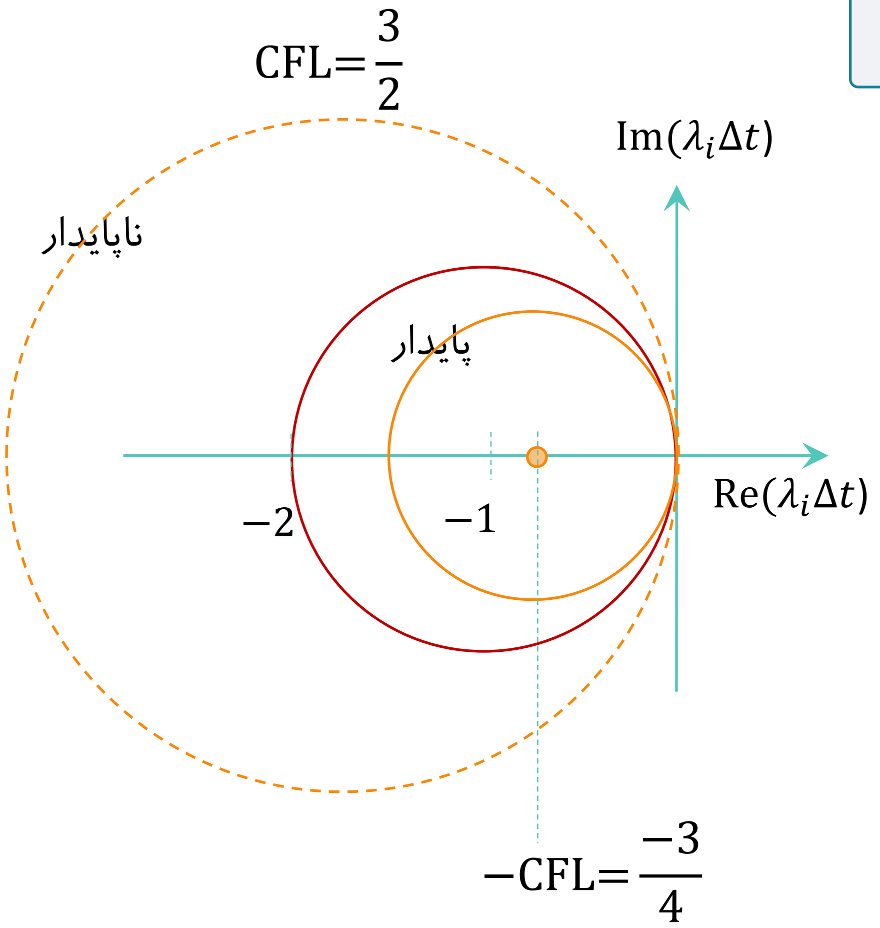
$$\lambda_i \Delta t = \mathrm{CFL}(\cos w_i - 1 - I \sin w_i)$$

$$\xi = \mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t) = \mathrm{CFL}\cos w_i - \mathrm{CFL}$$

$$\eta = \mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t) = -\mathrm{CFL}\sin w_i$$

$$(\xi + \mathrm{CFL})^2 + \eta^2 = \mathrm{CFL}^2$$

$$\boxed{\mathrm{CFL} \le 1}$$



پایداری و سازگاری

تحلیل پایداری روش‌های گسسته‌سازی زمانی

روش RK2

معادله موج یک بعدی

(گسسته‌سازی بادسو مرتبه دوم مکان)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} = -\frac{c}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) \qquad \begin{cases} \phi_e = \dfrac{-\bar{\phi}_{i-1} + 3\bar{\phi}_i}{2} \\ \phi_w = \dfrac{-\bar{\phi}_{i-2} + 3\bar{\phi}_{i-1}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} = -\frac{c}{\Delta x}\left(\frac{3}{2}\bar{\phi}_i - 2\bar{\phi}_{i-1} + \frac{1}{2}\bar{\phi}_{i-2}\right) \qquad a_{-2} = \frac{-c}{2\Delta x}, a_{-1} = \frac{2c}{\Delta x}, a_0 = \frac{-3c}{2\Delta x}$$

$$\lambda_i = a_{-2}e^{-2Iw_i} + a_{-1}e^{-Iw_i} + a_0 e^0$$

$$\boxed{\lambda_i = \frac{c}{\Delta x}\left[\left(\frac{-\cos 2w_i}{2} + 2\cos w_i - \frac{3}{2}\right) + \mathrm{I}\left(\frac{\sin 2w_i}{2} - 2\sin w_i\right)\right]}$$

$$\lambda_i \Delta t = \mathrm{CFL}\left[\left(\frac{-\cos 2w_i}{2} + 2\cos w_i - \frac{3}{2}\right) + \mathrm{I}\left(\frac{\sin 2w_i}{2} - 2\sin w_i\right)\right]$$

روش RK2

معادله موج یک بعدی

(گسسته‌سازی بادسو مرتبه دوم مکان)

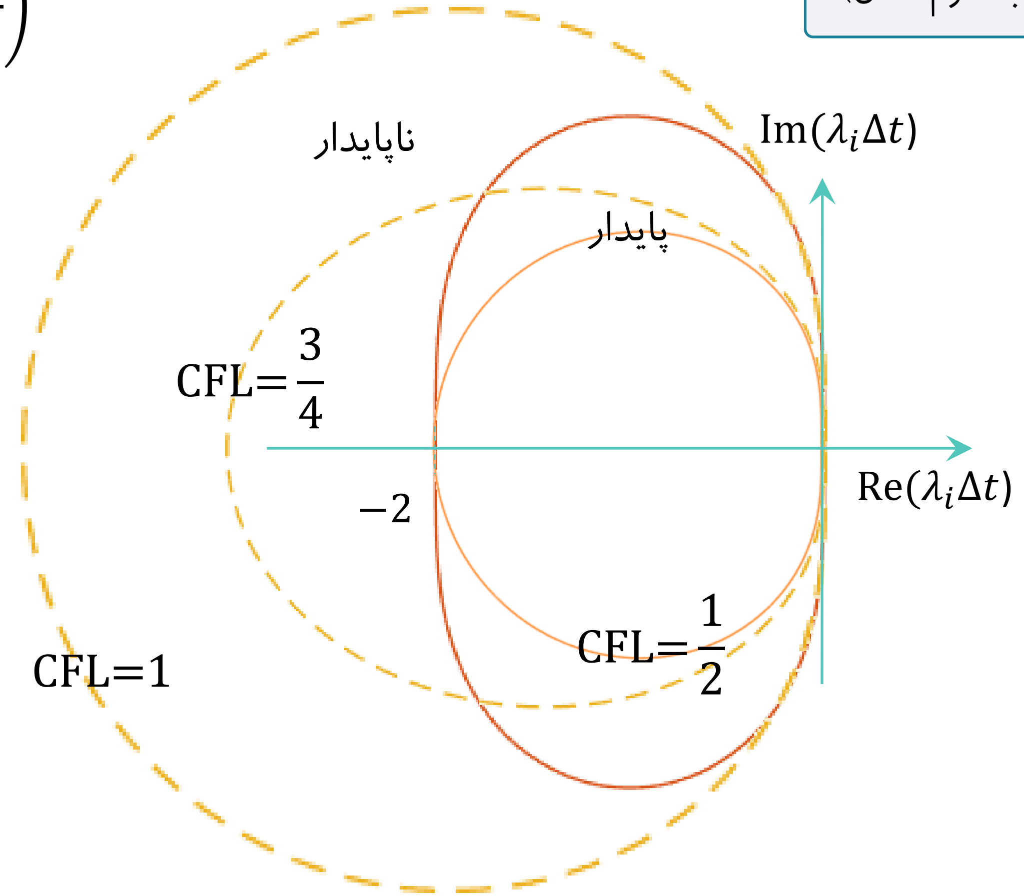
$$\lambda_i \Delta t = \mathrm{CFL}\left[\left(\frac{-\cos 2w_i}{2} + 2\cos w_i - \frac{3}{2}\right) + \mathrm{I}\left(\frac{\sin 2w_i}{2} - 2\sin w_i\right)\right]$$

$$\xi = \mathrm{Re}(\lambda_i \Delta t) = \mathrm{CFL}\left(\frac{-\cos 2w_i}{2} + 2\cos w_i - \frac{3}{2}\right)$$

$$\eta = \mathrm{Im}(\lambda_i \Delta t) = \mathrm{CFL}\left(\frac{\sin 2w_i}{2} - 2\sin w_i\right)$$

$$w_i = \frac{2\pi(i-1)}{N} \qquad i = 1,2,\dots,N$$

$$\boxed{\mathrm{CFL} \le \frac{1}{2}}$$



دقت گسسته‌سازی زمانی

$$\frac{d\phi_i}{dt} = R_i \qquad \frac{d\omega_i}{dt} = \lambda_i \omega_i \qquad \omega_{e,i} = \omega_{e,i}^{0} e^{\lambda_i t} \qquad |\sigma| = \left|\frac{\omega_{e,i}^{n+1}}{\omega_{e,i}^{n}}\right| = \left|e^{\lambda_i \Delta t}\right|$$

$$e^{\lambda_i \Delta t} = 1 + \lambda_i \Delta t + \frac{(\lambda_i \Delta t)^2}{2} + \frac{(\lambda_i \Delta t)^3}{6} + \cdots$$

دقت گسسته سازی زمانی یک مرتبه

کمتر از دقت ضریب بزرگنمایی

روش صریح اویلر $\sigma = 1 + \lambda_i \Delta t \qquad \sigma = 1 + \lambda_i \Delta t + O(\Delta t^2) \qquad O(\Delta t)$

روش ضمنی اویلر $\sigma = \frac{1}{1 - \lambda_i \Delta t} = 1 + \lambda_i \Delta t + (\lambda_i \Delta t)^2 + \cdots \qquad O(\Delta t)$

روش RK2 $\sigma = 1 + \lambda_i \Delta t + \frac{(\lambda_i \Delta t)^2}{2} \qquad O(\Delta t^2)$

روش RK3 $\sigma = 1 + \lambda_i \Delta t + \frac{(\lambda_i \Delta t)^2}{2} + \frac{(\lambda_i \Delta t)^3}{6} \qquad O(\Delta t^3)$

خوش وضع

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad \begin{array}{c} t \geq 0 \\ 0 \leq x \leq l \end{array} \qquad IC: \phi(x, 0) = f(x) \qquad BC: \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = g(t) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(l, t) = h(t) \end{cases}$$

$$\psi = \phi_1 - \phi_2$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad IC: \psi(x, 0) = \phi_1(x, 0) - \phi_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0 \qquad BC: \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(l, t) = 0 \end{cases}$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \psi^2(x, t) \mathrm{d}x \qquad E(0) = 0 \qquad E(t) \geq 0 \quad t \geq 0$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial \psi^2}{\partial t} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^l 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial t} \mathrm{d}x = \alpha \int_0^l \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \mathrm{d}x$$

$$= \alpha \left[\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_0^l - \alpha \int_0^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}x = -\alpha \int_0^l \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}x \leq 0$$

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$$

$$E(t) = 0 \qquad \psi \equiv 0$$

$$\phi_1 = \phi_2$$

تفاضل محدود

خوش وضع:

- ✓ روی یک دامنه بسته
- ✓ شرایط مرزی:
  - مقدار تابع جواب
  - گرادیان تابع جواب (بجز حداقل یک نقطه)

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S(x,y) \qquad x,y\in A$$

$$S(x,y)=0: \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

شرط مرزی دیریشله

$$BC:\ \phi(\partial A)=f(x,y)$$

شرط مرزی نیومن

$$BC:\begin{cases}\nabla\phi(\partial A-\delta(\partial A))=f(x,y)\\ \phi(\delta(\partial A))=g(x,y), \qquad |\delta(\partial A)|>0\end{cases}$$

شرط مرزی رابین

$$BC:\ \alpha\phi(\partial A)+\beta\nabla\phi(\partial A)$$

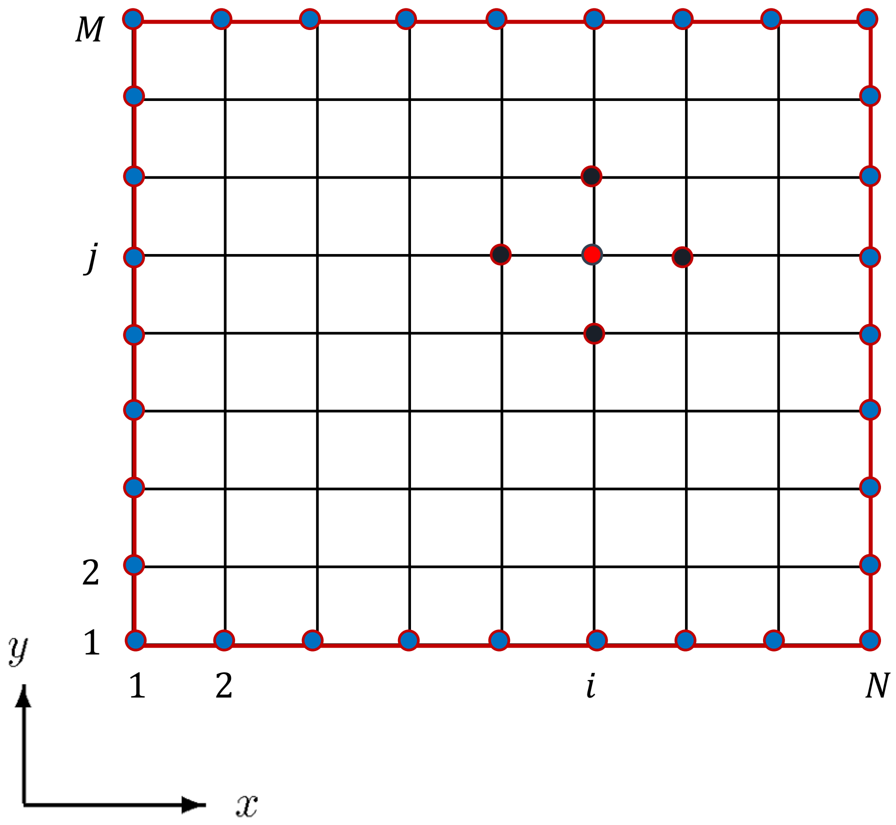
معادلات بیضوی

تفاضل محدود

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S(x,y)$$

$$0\le x\le l_1$$

$$0\le y\le l_2$$



$$\frac{\phi_{i-1,j}-2\phi_{i,j}+\phi_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\phi_{i,j-1}-2\phi_{i,j}+\phi_{i,j+1}}{\Delta y^2}=S_{i,j}$$

$$r_y\phi_{i,j-1}+r_x\phi_{i-1,j}-r\phi_{i,j}+r_x\phi_{i+1,j}+r_y\phi_{i,j+1}=S_{i,j}$$

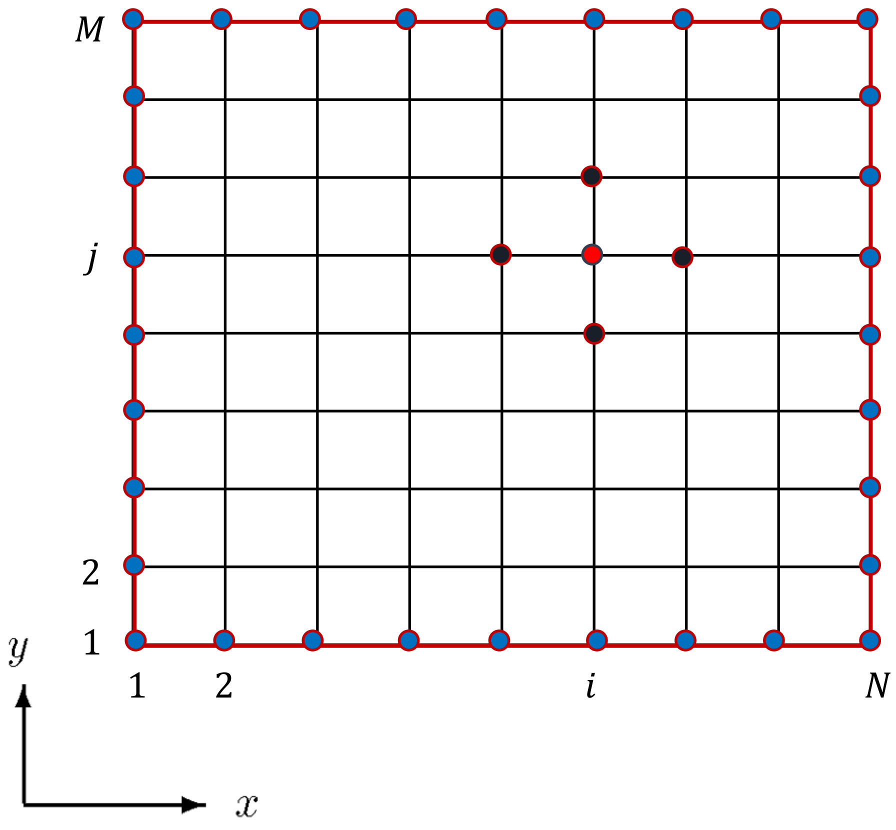
برای نقاط غیر مرزی:

$$r_x=\frac{1}{\Delta x^2}\qquad r_y=\frac{1}{\Delta y^2}\qquad r=\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}$$

معادلات بیضوی

تفاضل محدود

$$
\begin{bmatrix}
-r & r_x & & & & r_y & & & \\
r_x & -r & r_x & & & & \ddots & & \\
 & r_x & -r & r_x & & & & r_y & \\
 & & r_x & -r & r_x & & & & r_y \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
r_y & & & & r_x & -r & r_x & & \\
 & \ddots & & & & r_x & -r & r_x & \\
 & & r_y & & & & r_x & -r & r_x \\
 & & & r_y & & & & r_x & -r
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{3,1} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,M} \\ \phi_{N,M} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} R_{1,1} \\ R_{2,1} \\ R_{3,1} \\ \vdots \\ R_{N-1,M} \\ R_{N,M} \end{bmatrix}
$$



$$
R_{i,j}^{n} = \begin{cases} ?\,(B.C.), & i = 1, N \text{ or } j = 1, M \\ S_{i,j}, & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

$$
A_{P\times P} \times \vec{\phi}_{P\times 1} = \vec{R}_{P\times 1} \qquad P = M \times N
$$

روش‌های حل دستگاه

۱. روش مستقیم مثل روش هسته گوس (Gauss Elimination)

$O(P^3)$

$$\vec{\phi}_{P\times 1} = A^{-1}_{P\times P} \times \vec{R}_{P\times 1}$$

۲. روش‌های تقریبی مثل زیرفضای کریلف (Krylov Subspace)

$O(P)$

$$\vec{\phi}_{P\times 1} \cong \tilde{A}^{-1}_{P\times P} \times \vec{R}_{P\times 1}$$

۳. روش‌های تکراری (Iterative)

$$A = B + C$$

$$(B_{P\times P}+C_{P\times P}) \times \vec{\phi}_{P\times 1} = \vec{R}_{P\times 1}$$

$$B \times \vec{\phi} = -C \times \vec{\phi} + \vec{R}$$

$$B \times \vec{\phi}^{(k+1)} = -C \times \vec{\phi}^{(k)} + \vec{R} \qquad O(P)$$

$$\vec{\phi}^{(k+1)} = B^{-1} \times (-C \times \vec{\phi}^{(k)} + \vec{R})$$

تفاضل محدود

شکل گسسته معادله بیضوی

$$r_y\phi_{i,j-1} + r_x\phi_{i-1,j} - r\phi_{i,j} + r_x\phi_{i+1,j} + r_y\phi_{i,j+1} = S_{i,j}$$

$$r\phi_{i,j} = r_y\phi_{i,j-1} + r_x\phi_{i-1,j} + r_x\phi_{i+1,j} + r_y\phi_{i,j+1} - S_{i,j}$$

$$\phi_{i,j} = \frac{r_y}{r}(\phi_{i,j-1}+\phi_{i,j+1}) + \frac{r_x}{r}(\phi_{i-1,j}+\phi_{i+1,j}) - \frac{1}{r}S_{i,j}$$

$$\phi_{i,j} = \rho_y(\phi_{i,j-1}+\phi_{i,j+1}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}+\phi_{i+1,j}) - \rho S_{i,j}$$

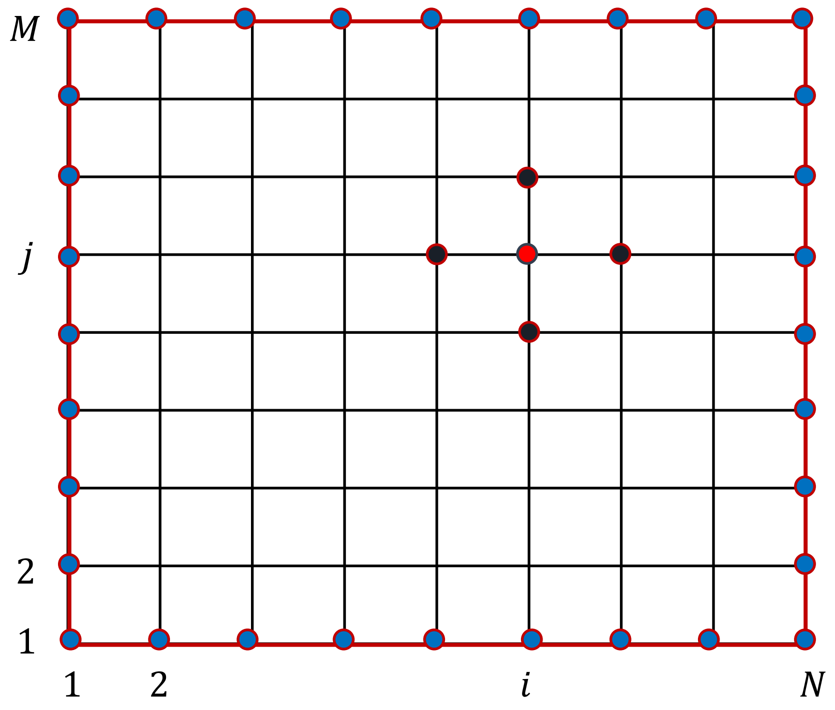
$$\rho_x = \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

$$\rho_y = \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

$$\rho = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

روش ژاکوبی نقطه‌ای (Point Jacobi)

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k} + \phi_{i+1,j}^{k}) - \rho S_{i,j}^{k}$$



مقداردهی اولیه (Initialize)

$$\phi_{i,j}^{k}\Big|_{\text{iter } k=1} = \phi_{i,j}^{1}$$

شرط همگرایی

$$\left|\delta\phi_{i,j}^{k+1}\right| = \left|\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k}\right| \le \epsilon$$

$$\left\|\overrightarrow{\delta\phi}^{k+1}\right\|_{q=2} \le \epsilon$$

$$\ell_2 = \sqrt{\frac{\sum\left(\delta\phi_{i,j}^{k+1}\right)^2}{P}}$$

P : تعداد مجهولات

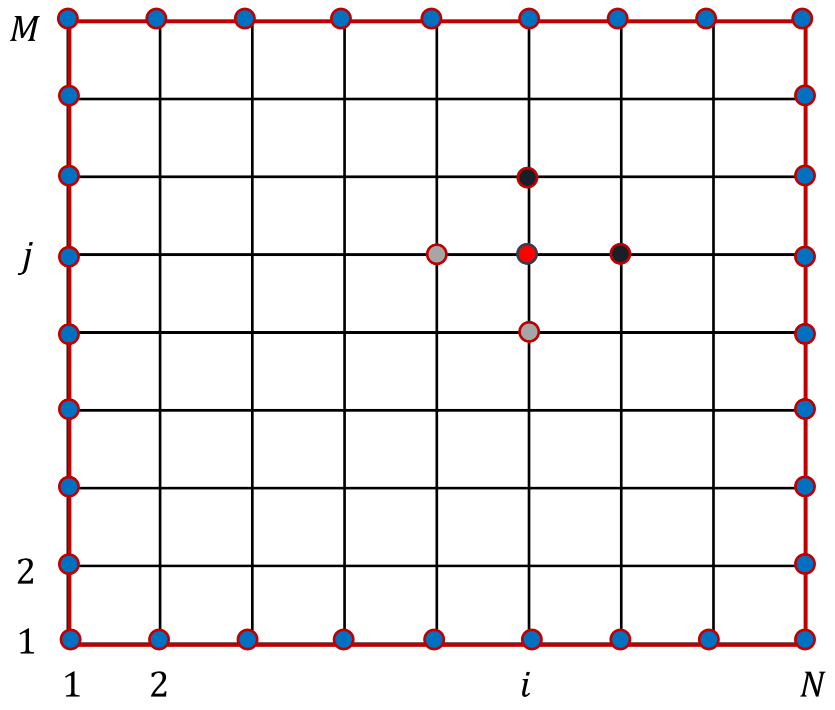
روش گوس-سایدل نقطه‌ای (Point Gauss-Seidel)

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k}) - \rho S_{i,j}^{k}$$

$$\delta\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k}$$

$$\delta\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k}) - \rho S_{i,j}^{k} - \phi_{i,j}^{k}$$

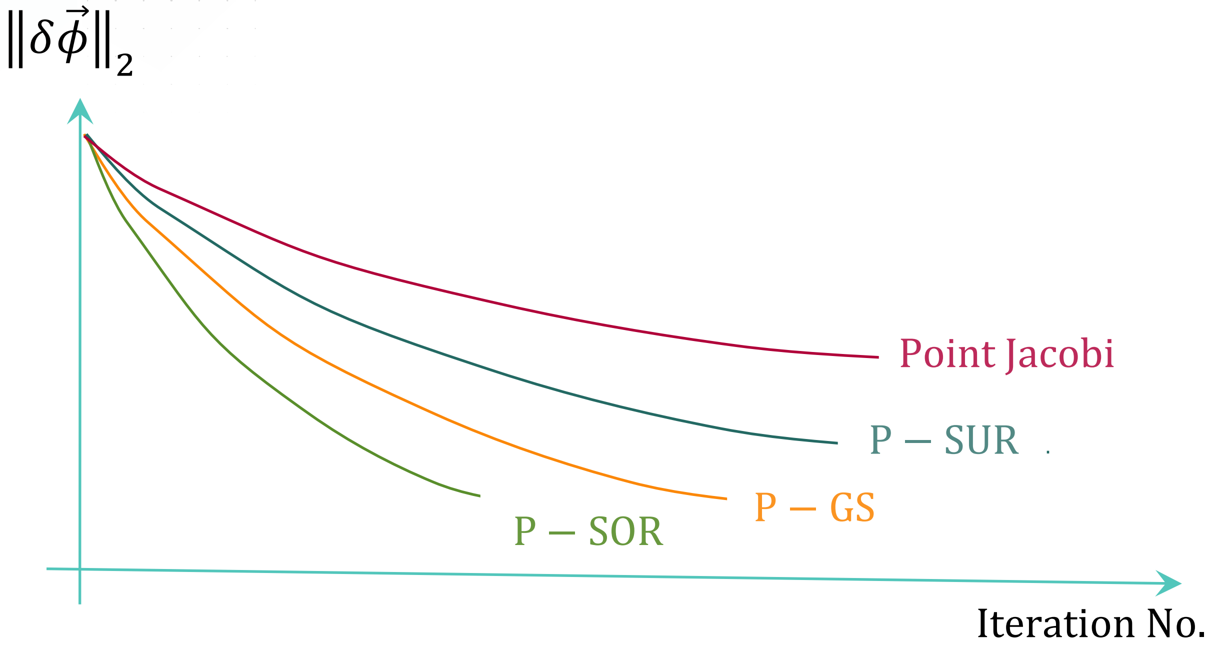
$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k} + \delta\phi_{i,j}^{k+1}$$



روش نقطه‌ای تشدید یا تخفیف SOR & SUR (Point Successive Over/Under Relaxation)

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k} + \omega\delta\phi_{i,j}^{k+1}$$

$$\delta\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k}) - \rho S_{i,j}^{k} - \phi_{i,j}^{k}$$



Relaxation Factor

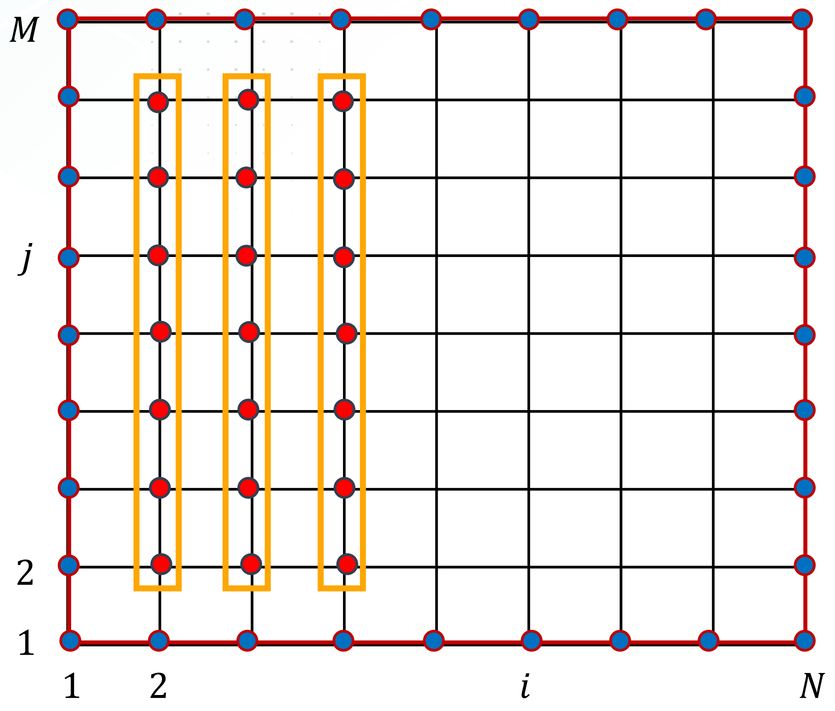
ضریب رهاسازی ω

$0 < \omega < 1$	Under Relaxation Factor
$1 < \omega < 2$	Over Relaxation Factor
$\omega > 2$	ناپایدار

روش ژاکوبی خطی (Line Jacobi)

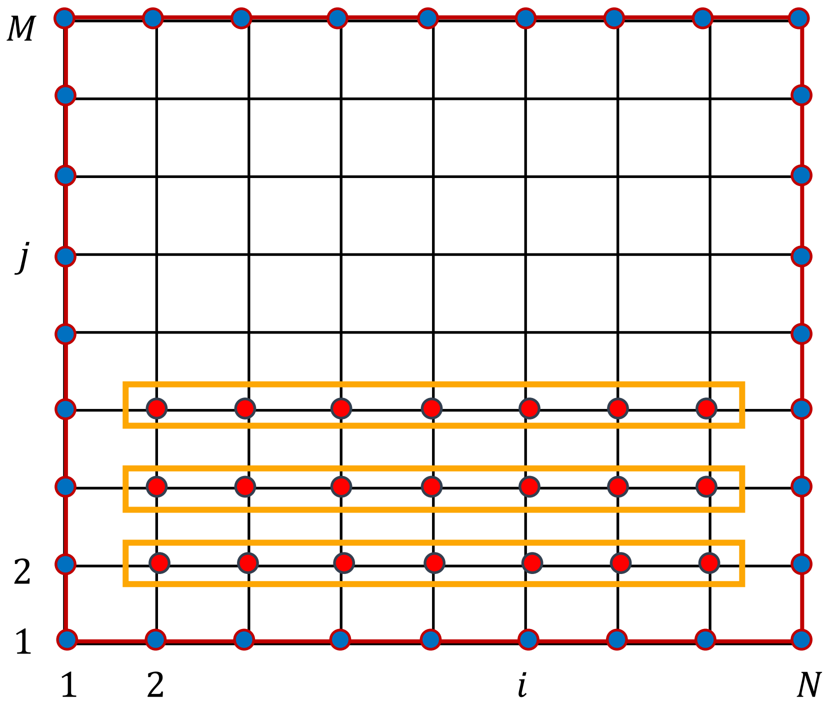
$$\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}) - \rho S_{i,j}^{k}$$

ستون به ستون



انتخاب روش:

- ✓ مسائل همسانگرد (Isotropic): همگرایی مشابه با روش نقطه‌ای (هزینه یکسان).
- ✓ مسائل غیر همسانگرد: جهت غالب گرادیان (در لایه مرزی: $\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$) ستون به ستون



ردیف به ردیف

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k+1}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k} + \phi_{i+1,j}^{k}) - \rho S_{i,j}^{k}$$

روش ژاکوبی خطی (Line Jacobi)

ردیف به ردیف

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}) - \rho S_{i,j}^{k}$$

$$\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = \rho S_{i,j}^{k} - \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k} + \phi_{i,j+1}^{k})$$

$$\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = R_{i,j}^{k}$$

نقاط غیر مرزی

$$R_{i,j}^{k} = \rho S_{i,j}^{k} - \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k} + \phi_{i,j+1}^{k})$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \rho_x & & & & \\ \rho_x & -1 & \rho_x & & & \\ & \rho_x & -1 & \rho_x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \rho_x & -1 & \rho_x \\ & & & & \rho_x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,j}^{k+1} \\ \phi_{2,j}^{k+1} \\ \phi_{3,j}^{k+1} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,j}^{k+1} \\ \phi_{N,j}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,j}^{k} \\ R_{2,j}^{k} \\ R_{3,j}^{k} \\ \vdots \\ R_{N-1,j}^{k} \\ R_{N,j}^{k} \end{bmatrix}$$

روش گوس-سایدل خطی (Line Gauss-Seidel)

ردیف به ردیف

$$\boxed{\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}) - \rho S_{i,j}^{k}}$$

ستون به ستون

$$\boxed{\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k+1}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k}) - \rho S_{i,j}^{k}}$$

ردیف به ردیف

$$\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = \rho S_{i,j}^{k} - \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k})$$

$$\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = R_{i,j}^{k}$$

$$R_{i,j}^{k} = \rho S_{i,j}^{k} - \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k})$$

روش تشدید یا تخفیف خطی (Line SOR & SUR)

ردیف به ردیف روش گوس سایدل

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}) - \rho S_{i,j}^{k}$$

$$\delta\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k}$$

$$\delta\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right) + \rho_x\left(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}\right) - \rho S_{i,j}^{k} - \phi_{i,j}^{k}$$

روش SOR

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k} + \omega\delta\phi_{i,j}^{k+1}$$

ردیف به ردیف روش SOR

$$\boxed{\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k} + \omega\left(\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right) + \rho_x\left(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}\right) - \rho S_{i,j}^{k} - \phi_{i,j}^{k}\right)}$$

روش تشدید یا تخفیف خطی (Line SOR & SUR)

ردیف به ردیف روش SOR

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k} + \omega\left(\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right) + \rho_x\left(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}\right) - \rho S_{i,j}^{k} - \phi_{i,j}^{k}\right)$$

$$\omega\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \omega\rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = (\omega-1)\phi_{i,j}^{k} + \omega\rho S_{i,j}^{k} - \omega\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right)$$

$$\omega\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \omega\rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = R_{i,j}^{k} \qquad R_{i,j}^{k} = (\omega-1)\phi_{i,j}^{k} + \omega\rho S_{i,j}^{k} - \omega\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \omega\rho_x & & & & \\ \omega\rho_x & -1 & \omega\rho_x & & & \\ & \omega\rho_x & -1 & \omega\rho_x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \omega\rho_x & -1 & \omega\rho_x \\ & & & & \omega\rho_x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,j}^{k+1} \\ \phi_{2,j}^{k+1} \\ \phi_{3,j}^{k+1} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,j}^{k+1} \\ \phi_{N,j}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,j}^{k} \\ R_{2,j}^{k} \\ R_{3,j}^{k} \\ \vdots \\ R_{N-1,j}^{k} \\ R_{N,j}^{k} \end{bmatrix}$$

روش ضمنی جهت متناوب (ADI)

ردیف به ردیف روش SOR

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k} + \omega\left(\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right) + \rho_x\left(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+1}\right) - \rho S_{i,j}^{k} - \phi_{i,j}^{k}\right)$$

$$\omega\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \omega\rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = (\omega - 1)\phi_{i,j}^{k} + \omega\rho S_{i,j}^{k} - \omega\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right)$$

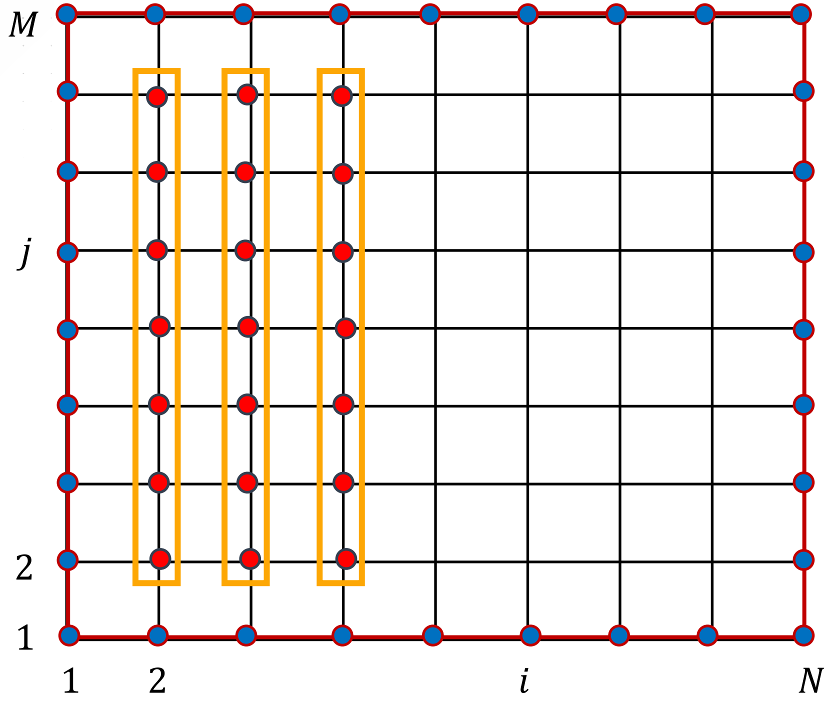
$$\omega\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \omega\rho_x\phi_{i+1,j}^{k+1} = R_{i,j}^{k} \qquad R_{i,j}^{k} = (\omega - 1)\phi_{i,j}^{k} + \omega\rho S_{i,j}^{k} - \omega\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k}\right)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \omega\rho_x & & & & \\ \omega\rho_x & -1 & \omega\rho_x & & & \\ & \omega\rho_x & -1 & \omega\rho_x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \omega\rho_x & -1 & \omega\rho_x \\ & & & & \omega\rho_x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,j}^{k+1} \\ \phi_{2,j}^{k+1} \\ \phi_{3,j}^{k+1} \\ \vdots \\ \phi_{N-1,j}^{k+1} \\ \phi_{N,j}^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1,j}^{k} \\ R_{2,j}^{k} \\ R_{3,j}^{k} \\ \vdots \\ R_{N-1,j}^{k} \\ R_{N,j}^{k} \end{bmatrix}$$

روش ضمنی جهت متناوب (ADI)

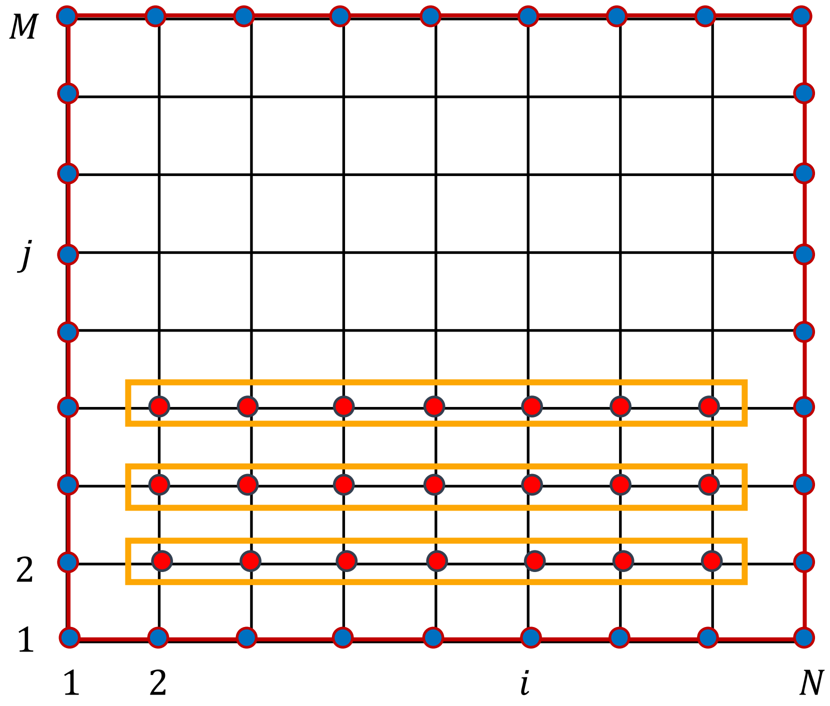
ستون به ستون

$$k+1 \leftarrow k+\frac{1}{2}$$



ردیف به ردیف

$$k+\frac{1}{2} \leftarrow k$$



روش ضمنی جهت متناوب (ADI)

ردیف به ردیف

$$\phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}) - \rho S_{i,j}^{k}$$

ستون به ستون

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k+1}) + \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}) - \rho S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$$

ردیف به ردیف

$$R_{i,j}^{k} = \rho S_{i,j}^{k} - \rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j+1}^{k}) \qquad \rho_x\phi_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \rho_x\phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = R_{i,j}^{k}$$

ستون به ستون

$$R_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \rho S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}) \qquad \rho_y\phi_{i,j+1}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \rho_y\phi_{i,j+1}^{k+1} = R_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$$

روش Over-Relaxed ADI

ردیف به ردیف

ستون به ستون

$$\begin{cases} \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \phi_{i,j}^{k} + \omega\left(\rho_y\left(\phi_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j+1}^{k}\right) + \rho_x\left(\phi_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) - \rho S_{i,j}^{k} - \phi_{i,j}^{k}\right) \\ \phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \omega\left(\rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+1} + \phi_{i,j+1}^{k+1}) + \rho_x\left(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) - \rho S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$$

$$\omega\rho_x\phi_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - \phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \omega\rho_x\phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = R_{i,j}^{k}$$

$$R_{i,j}^{k} = (\omega-1)\phi_{i,j}^{k} + \omega\rho S_{i,j}^{k} - \omega\rho_y(\phi_{i,j-1}^{k+\frac{1}{2}} + \phi_{i,j+1}^{k})$$

$$\omega\rho_y\phi_{i,j+1}^{k+1} - \phi_{i,j}^{k+1} + \omega\rho_y\phi_{i,j+1}^{k+1} = R_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$$

$$R_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = (\omega-1)\phi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \omega\rho S_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \omega\rho_x(\phi_{i-1,j}^{k+1} + \phi_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}})$$

معادلات بیضوی

تفاضل محدود

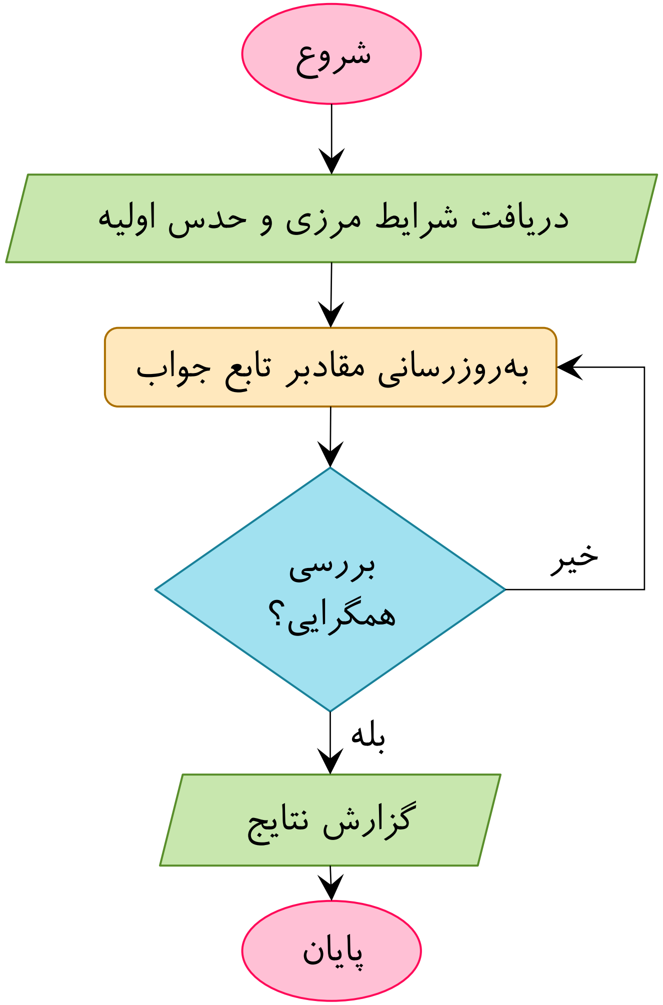
شرط مرزی دیریشله

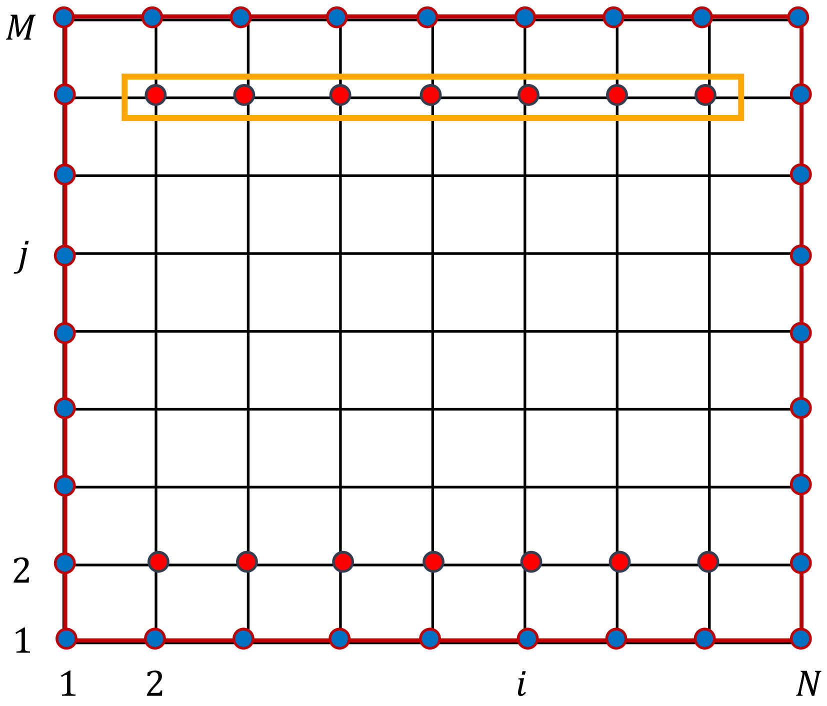
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S(x,y)$$

$$0\le x\le l_1 \qquad 0\le y\le l_2$$

$$BC:\begin{cases}\phi(x,0)=f(x)\\ \phi(x,l_2)=g(x)\\ \phi(0,y)=h(y)\\ \phi(l_1,y)=w(y)\end{cases}$$

$$BC:\begin{cases}\phi_{i,1}=f(x_i)\\ \phi_{i,M}=g(x_i)\\ \phi_{1,j}=h(y_j)\\ \phi_{N,j}=w(y_j)\end{cases}$$





شرط مرزی نیومن

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S(x, y) \qquad 0 \le x \le l_1 \qquad 0 \le y \le l_2$$

$$BC: \frac{\partial \phi}{\partial y}(x\,, l_2) = f(x)$$

$$\frac{\phi_{i,M+1} - \phi_{i,M-1}}{2\Delta y} = f(x_i)$$

$$\phi_{i,M+1} = 2\Delta y f(x_i) + \phi_{i,M-1}$$

$$\phi_{i,M+1}^k = 2\Delta y f(x_i) + \phi_{i,M-1}^k$$

لزوم به‌روزرسانی نقاط مجازی در هر نیم مرحله روش ADI

دریافت شرایط مرزی و حدس اولیه برای داخل میدان و مرز نیومن

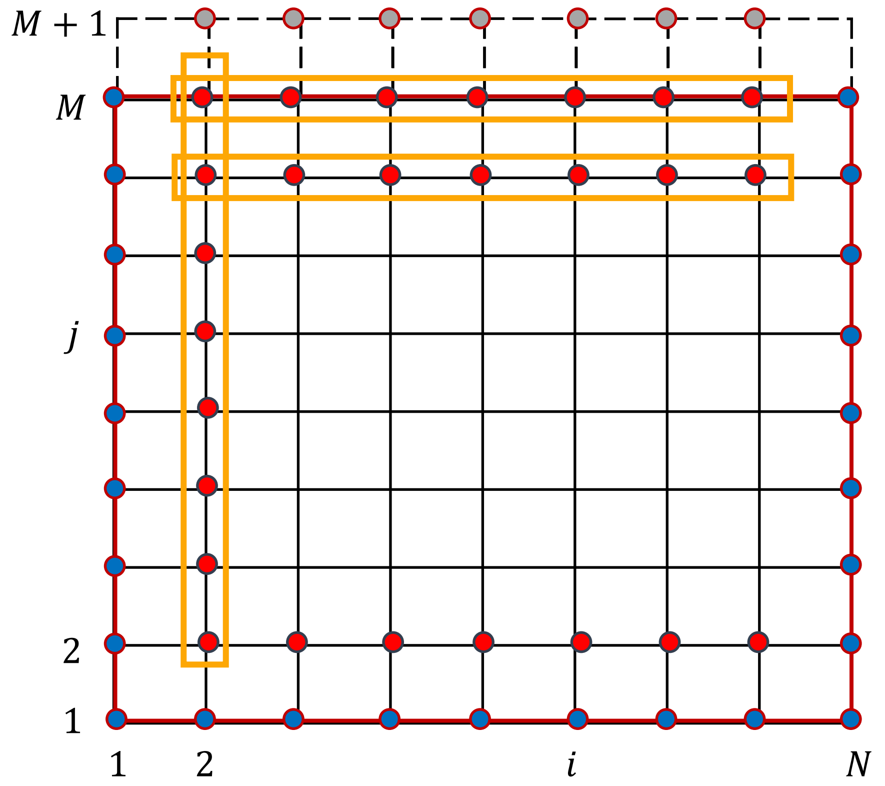
به‌روزرسانی نقاط مجازی

به‌روزرسانی مقادیر تابع جواب و مرزهای نیومن

بررسی همگرایی؟

خیر

بله



شرط مرزی رابین

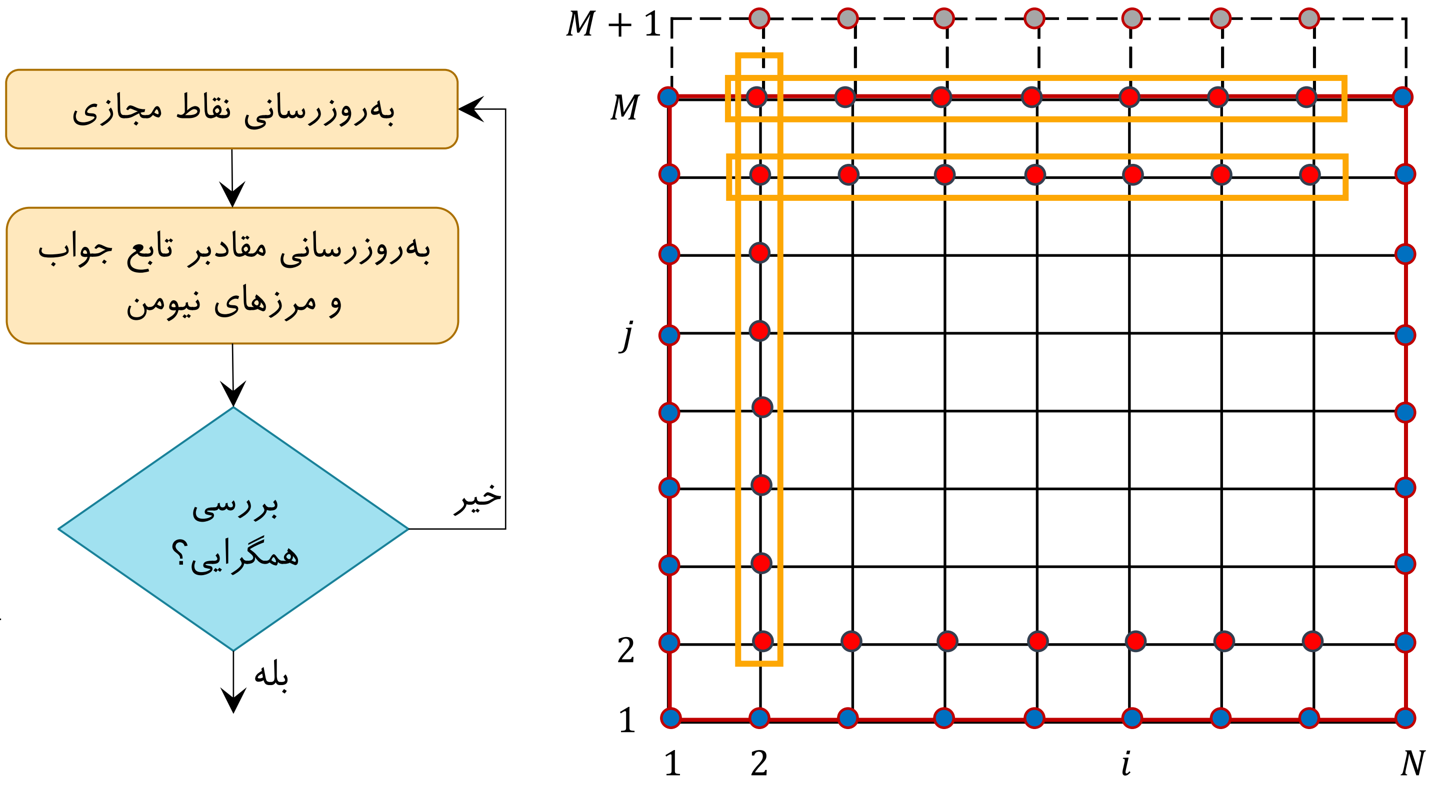
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S(x,y) \qquad 0\le x\le l_1 \qquad 0\le y\le l_2$$

$$BC: a\phi(x,l_2)+\frac{\partial\phi}{\partial y}(x\,,l_2)=f(x)$$

$$a\phi_{i,M}+b\,\frac{\phi_{i,M+1}-\phi_{i,M-1}}{2\Delta y}=f(x_i)$$

$$\phi_{i,M+1}=\frac{2\Delta y}{b}\left(f(x_i)-a\phi_{i,M}\right)+\phi_{i,M-1}$$

$$\phi^k_{i,M+1}=\frac{2\Delta y}{b}\left(f(x_i)-a\phi^k_{i,M}\right)+\phi^k_{i,M-1}$$



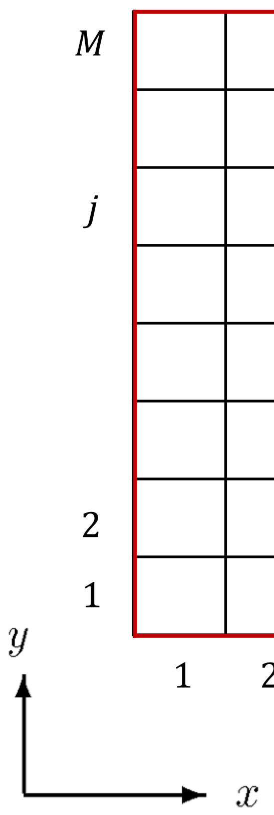
لزوم به‌روزرسانی نقاط مجازی در هر نیم مرحله روش ADI

حجم محدود

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S(x,y)$$

$$0\le x\le l_1$$

$$0\le y\le l_2$$



$$\frac{\bar\phi_{i-1,j}-2\bar\phi_{i,j}+\bar\phi_{i+1,j}}{\Delta x^2}+\frac{\bar\phi_{i,j-1}-2\bar\phi_{i,j}+\bar\phi_{i,j+1}}{\Delta y^2}=\bar S_{i,j}$$

$$r_y\bar\phi_{i,j-1}+r_x\bar\phi_{i-1,j}-r\bar\phi_{i,j}+r_x\bar\phi_{i+1,j}+r_y\bar\phi_{i,j+1}=\bar S_{i,j}$$

$$\bar S_{i,j}=S_{i,j}+O(\Delta x^2)$$

برای تمامی سلول‌های حقیقی:

$$r_x=\frac{1}{\Delta x^2}\qquad r_y=\frac{1}{\Delta y^2}\qquad r=\frac{2}{\Delta x^2}+\frac{2}{\Delta y^2}$$

روش گوس سایدل نقطه‌ای

$$\bar{\phi}_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\bar{\phi}_{i,j-1}^{k+1} + \bar{\phi}_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\bar{\phi}_{i-1,j}^{k+1} + \bar{\phi}_{i+1,j}^{k}) - \rho\bar{S}_{i,j}^{k}$$

$$\rho_x = \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \qquad \rho_y = \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \qquad \rho = \frac{\Delta x^2 \Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

$$\delta\bar{\phi}_{i,j}^{k+1} = \bar{\phi}_{i,j}^{k+1} - \bar{\phi}_{i,j}^{k}$$

$$\left\|\overrightarrow{\delta\phi}\right\|_2 \leq \epsilon$$

معادلات بیضوی

حجم محدود

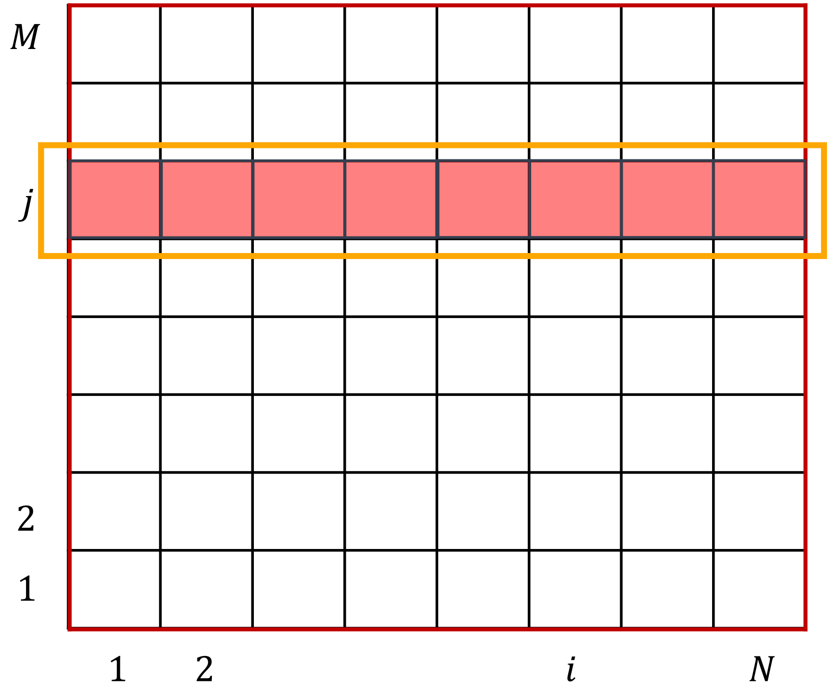
روش گوس سایدل خطی

ردیف به ردیف

$$\boxed{\bar{\phi}_{i,j}^{k+1} = \rho_y(\bar{\phi}_{i,j-1}^{k+1} + \bar{\phi}_{i,j+1}^{k}) + \rho_x(\bar{\phi}_{i-1,j}^{k+1} + \bar{\phi}_{i+1,j}^{k+1}) - \rho\bar{S}_{i,j}^{k}}$$

$$\rho_x\bar{\phi}_{i-1,j}^{k+1} - \bar{\phi}_{i,j}^{k+1} + \rho_x\bar{\phi}_{i+1,j}^{k+1} = \bar{R}_{i,j}^{k}$$

$$\bar{R}_{i,j}^{k} = \rho\bar{S}_{i,j}^{k} - \rho_y(\bar{\phi}_{i,j-1}^{k+1} + \bar{\phi}_{i,j+1}^{k})$$



حجم محدود

شرط مرزی دیریشله

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S(x,y)$$

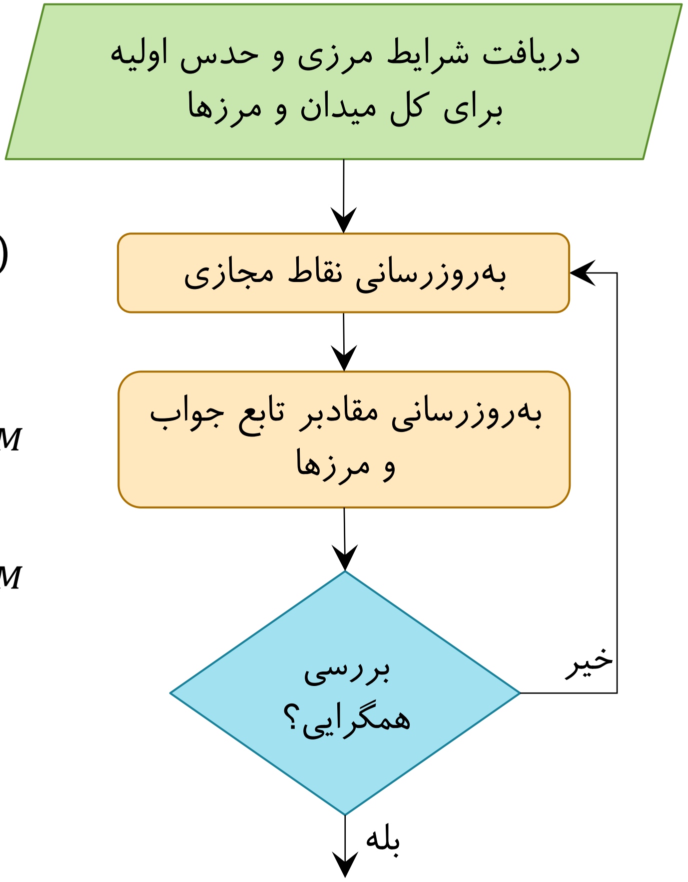
$$0\le x\le l_1 \qquad 0\le y\le l_2$$

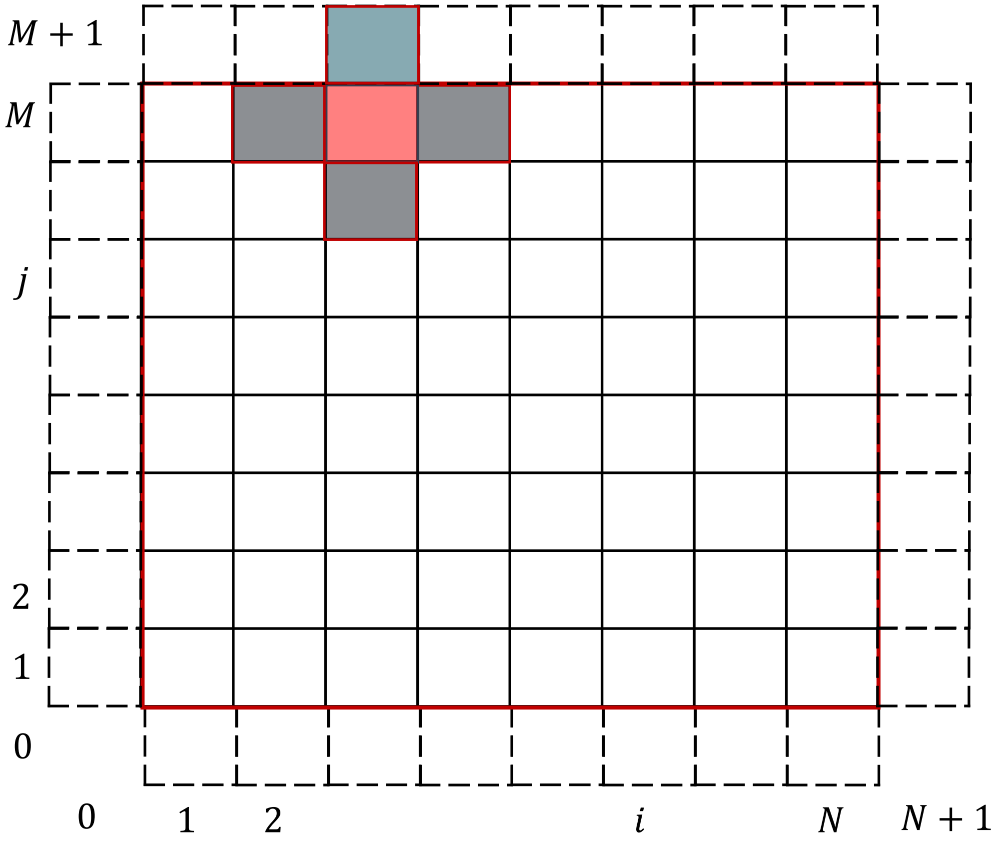
$$BC:\phi(x,l_2)=f(x)$$

$$\frac{\bar\phi_{i,M+1}+\bar\phi_{i,M}}{2}=f(x_i)$$

$$\bar\phi_{i,M+1}=2f(x_i)-\bar\phi_{i,M}$$

$$\bar\phi^k_{i,M+1}=2f(x_i)-\bar\phi^k_{i,M}$$





معادلات بیضوی

حجم محدود

شرط مرزی نیومن

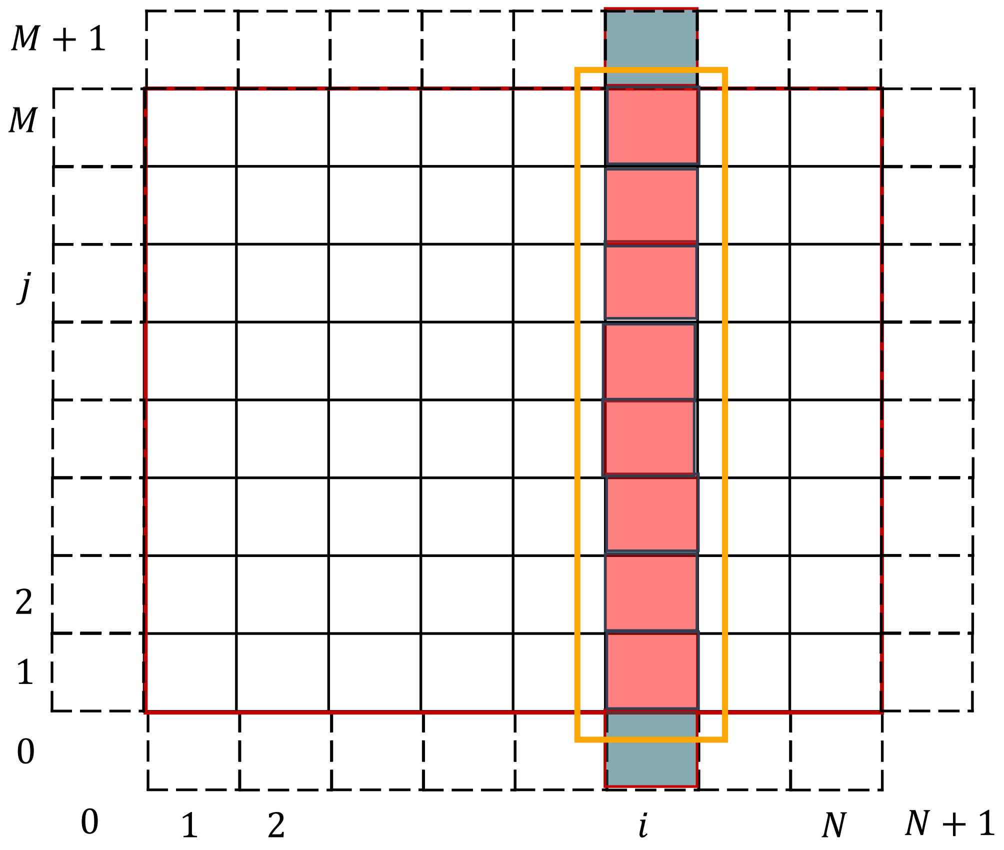
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=S(x,y) \qquad 0\le x\le l_1 \qquad 0\le y\le l_2$$

$$BC{:}\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x\,,l_2)=f(x)$$

$$\frac{\bar\phi_{i,M+1}-\bar\phi_{i,M}}{\Delta y}=f(x_i)$$

$$\bar\phi_{i,M+1}=\Delta y f(x_i)+\bar\phi_{i,M}$$

$$\bar\phi^k_{i,M+1}=\Delta y f(x_i)+\bar\phi^k_{i,M}$$



معادلات هذلولوی

تعریف

خوش وضع:

- ✓ شرایط اولیه:
- ✓ مقدار تابع جواب و گرادیان آن
- ✓ شرایط مرزی:
  - مقدار تابع جواب
  - گرادیان تابع جواب

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=S(x,y)$$

معادله موج

$$S(x,y)=0:\qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=0$$

معادله پتانسیل جریان غیر لزج غیر چرخشی، تراکم‌پذیر:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+(1-M^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad M>1$$

معادله موج مرتبه یک

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$$

کاربرد

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -c\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = -c\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

شتاب یک بعدی

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

معادله انرژی یک بعدی

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

معادله انرژی دو بعدی

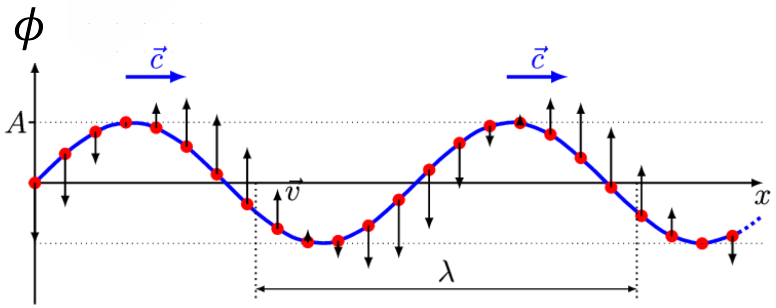
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\nabla^2 T$$

معادله موج

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$$\phi(x,0) = f(x) \qquad \phi(0,t) = g(t)$$

$$\phi_{\text{exact}}(x,t) = \begin{cases} f(x-ct); & x > ct \\ g\left(t - \frac{x}{c}\right); & x < ct \end{cases}$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad t \ge 0 \qquad \phi_{\text{exact}}(x,t) = f(x-ct) \qquad 0 \le x \le l$$

$$\phi(x,0) = f(x) \qquad \phi(x,t) = \phi(x-l,t) \qquad T = \frac{l}{c}$$

دوره تناوب

روش صریح اویلر – پسرو مرتبه یک مکانی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c > 0 \qquad 0 \leq x \leq l \qquad t \geq 0$$

روش صریح اویلر با گسسته‌سازی پسرو مکان — FTBS

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = -c\left(\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}\right) \qquad \boxed{O(\Delta t, \Delta x)}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) \qquad \mathrm{CFL} = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \mathrm{CFL}(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) \qquad \boxed{\phi_i^{n+1} = \phi_i^n(1 - \mathrm{CFL}) + \mathrm{CFL}\,\phi_{i-1}^n}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL} \leq 1}$

روش صریح اویلر – مرتبه یک مکانی

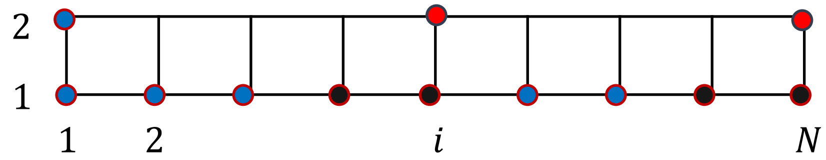
شرط مرزی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$\phi(0,t) = g(t)$ شرط مرزی دیریشله

$$\boxed{\phi_1^{n+1} = g(t_{n+1})}$$

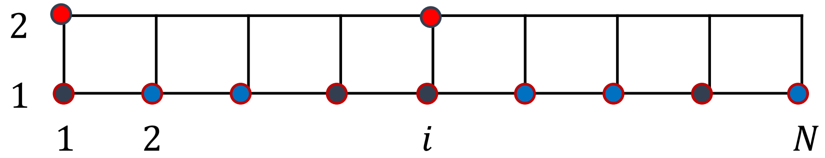
$$\boxed{\phi_N^{n+1} = \phi_N^n(1 - \mathrm{CFL}) + \mathrm{CFL}\phi_{N-1}^n}$$



$\phi(x,t) = \phi(x - l, t)$ شرط مرزی متناوب

$$\boxed{\phi_1^{n+1} = \phi_1^n(1 - \mathrm{CFL}) + \mathrm{CFL}\ \phi_{N-1}^n}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_{i-N+1}^{n+1} \qquad \phi_0^{n+1} = \phi_{N-1}^{n+1}$$



روش صریح اویلر – گسسته‌سازی مرکزی مکان

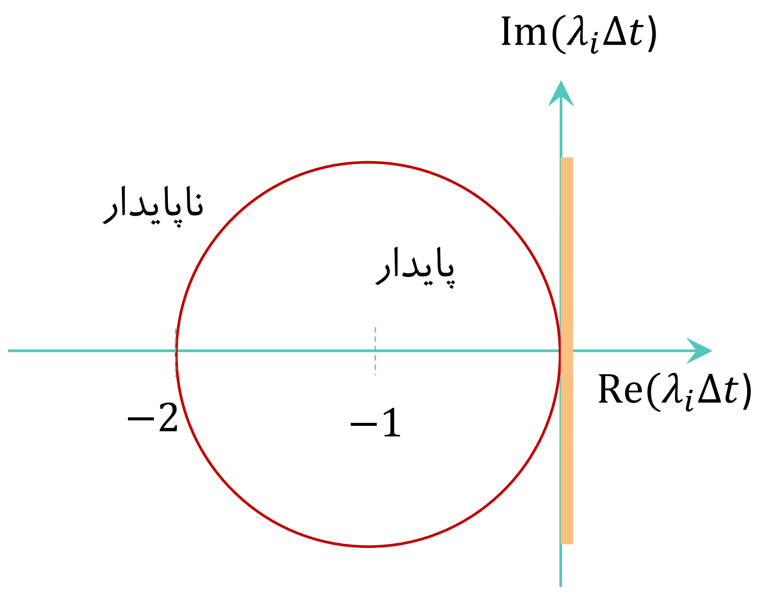
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = -c\left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) \qquad O(\Delta t, \Delta x^2) \qquad \text{FTCS}$$

تحلیل پایداری

$$\lambda_i \Delta t = -\mathrm{CFL}\ \mathrm{I} \sin w_i$$

همواره ناپایدار



تفاضل محدود

روش صریح لکس (Lax)

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \qquad c>0 \qquad 0\le x\le l \qquad t\ge 0$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-c\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\phi_i^n=\frac{\phi_{i+1}^n+\phi_{i-1}^n}{2} \qquad \frac{\phi_i^{n+1}-\frac{\phi_{i+1}^n+\phi_{i-1}^n}{2}}{\Delta t}=-c\left(\frac{\phi_{i+1}^n-\phi_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) \qquad \boxed{O(\Delta t,\Delta x^2)}$$

$$\boxed{\phi_i^{n+1}=\frac{1}{2}(\phi_{i+1}^n+\phi_{i-1}^n)+\frac{c\Delta t}{2\Delta x}(\phi_{i+1}^n-\phi_{i-1}^n)}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL}\le 1}$

روش صریح لکس-وندروف (Lax-Wendroff)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c > 0$$

$$\phi(x, t + \Delta t) = \phi(x, t) + \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c\frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta t + \frac{1}{2}c^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Delta t^2$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c\Delta t\left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}\right) + \frac{1}{2}c^2\Delta t^2\left(\frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right)$$

$$\boxed{\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\mathrm{CFL}}{2}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{\mathrm{CFL}^2}{2}(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)}$$

$$\boxed{O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL} \leq 1}$

روش‌های لکس و لکس-وندروف

شرط مرزی

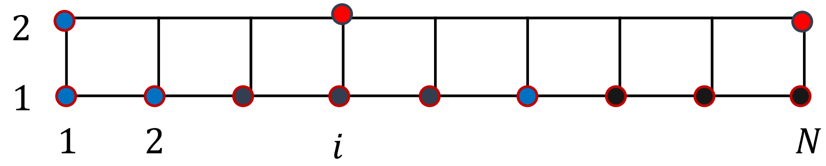
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

شرط مرزی دیریشله

$$\phi(0,t) = g(t)$$

$$\boxed{\phi_1^{n+1} = g(t_{n+1})}$$

ϕ_N^{n+1}: روش تفاضلی یکسو



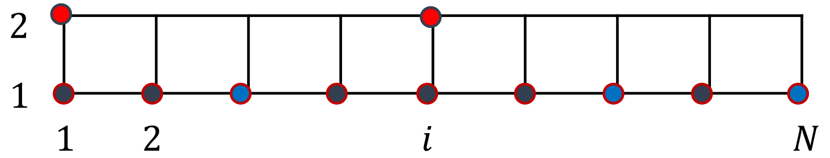
شرط مرزی متناوب (روش لکس)

$$\phi(x,t) = \phi(x-l,t)$$

$$\phi_0^{n+1} = \phi_{N-1}^{n+1}$$

$$\boxed{\phi_1^{n+1} = \frac{1}{2}(\phi_2^n + \phi_{N-1}^n) + \frac{\mathrm{CFL}}{2}(\phi_2^n - \phi_{N-1}^n)}$$

$$\boxed{\phi_N^{n+1} = \phi_1^{n+1}}$$



روش صریح رانج-کوتا مرتبه دو (RK2)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

گسسته‌سازی پسرو مرتبه ۲ مکان

$$\begin{cases} \dfrac{\phi_i^{n+\frac{1}{2}} - \phi_i^n}{\Delta t/2} = -\dfrac{c}{\Delta x}\left(\dfrac{3\phi_i^n - 4\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n}{2}\right) \\ \dfrac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = -\dfrac{c}{\Delta x}\left(\dfrac{3\phi_i^{n+\frac{1}{2}} - 4\phi_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i-2}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL} \leq 0.5}$

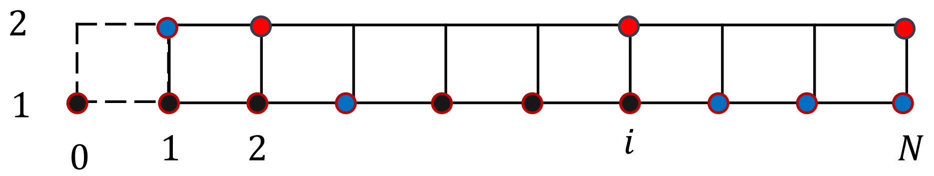
روش رانج-کوتا مرتبه دو

شرط مرزی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$$\phi(0,t) = g(t)$$

شرط مرزی دیریشله



$$\phi_1^n = g(t_n)$$

$$\frac{\phi_0^n + \phi_2^n}{2} = g(t_n) \qquad \frac{\phi_2^{n+\frac{1}{2}} - \phi_2^n}{\Delta t/2} = -\frac{c}{\Delta x}\left(\frac{3\phi_2^n - 4\phi_1^n + \phi_0^n}{2}\right)$$

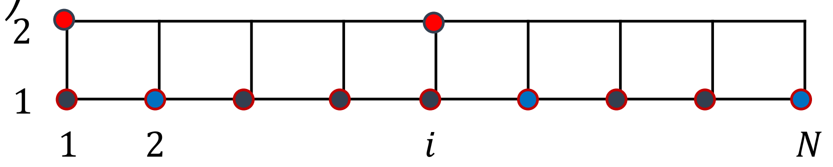
$$\phi(x,t) = \phi(x-l,t)$$

شرط مرزی متناوب

$$\phi_0^n = \phi_{N-1}^n$$

$$\phi_{-1}^n = \phi_{N-2}^n$$

$$\frac{\phi_1^{n+\frac{1}{2}} - \phi_1^n}{\Delta t/2} = -\frac{c}{\Delta x}\left(\frac{3\phi_1^n - 4\phi_{N-1}^n + \phi_{N-2}^n}{2}\right)$$



روش ضمنی اویلر – مرتبه یک مکانی

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-c\frac{\partial\phi}{\partial x}\qquad c>0\qquad 0\le x\le l\qquad t\ge 0$$

روش ضمنی اویلر با گسسته‌سازی پسرو مکان

BTBS

$$\frac{\phi_i^n-\phi_i^{n-1}}{\Delta t}=-c\left(\frac{\phi_i^n-\phi_{i-1}^n}{\Delta x}\right)\qquad \boxed{O(\Delta t,\Delta x)}$$

$$\phi_i^n=\phi_i^{n-1}-\mathrm{CFL}(\phi_i^n-\phi_{i-1}^n)\qquad \boxed{\phi_i^n(1+\mathrm{CFL})-\mathrm{CFL}\phi_{i-1}^n=\phi_i^{n-1}}$$

$$\begin{bmatrix}1+\mathrm{CFL} & & & & & \\ -\mathrm{CFL} & 1+\mathrm{CFL} & & & & \\ & -\mathrm{CFL} & 1+\mathrm{CFL} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1+\mathrm{CFL} & \\ & & & & -\mathrm{CFL} & 1+\mathrm{CFL}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^n\\ \phi_2^n\\ \phi_3^n\\ \vdots\\ \phi_{N-1}^n\\ \phi_N^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\phi_1^{n-1}\\ \phi_2^{n-1}\\ \phi_3^{n-1}\\ \vdots\\ \phi_{N-1}^{n-1}\\ \phi_N^{n-1}\end{bmatrix}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL}\le 1}$

$$\phi_i^n=\frac{\phi_i^{n-1}+\mathrm{CFL}\phi_{i-1}^n}{1+\mathrm{CFL}}\qquad i=2,3,\dots,N$$

روش ضمنی اویلر – مرتبه دو مکانی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

روش ضمنی اویلر با گسسته‌سازی مرکزی مکان

BTCS

$$\boxed{O(\Delta t, \Delta x^2)}$$

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{\Delta t} = -c\left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}\right)$$

$$\phi_i^n = \phi_i^{n-1} - \frac{\text{CFL}}{2}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)$$

$$\boxed{-\frac{\text{CFL}}{2}\phi_{i-1}^n + \phi_i^n + \frac{\text{CFL}}{2}\phi_{i+1}^n = \phi_i^{n-1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1+\text{CFL} & \frac{\text{CFL}}{2} & & & & \\ -\frac{\text{CFL}}{2} & 1+\text{CFL} & \frac{\text{CFL}}{2} & & & \\ & -\frac{\text{CFL}}{2} & 1+\text{CFL} & \frac{\text{CFL}}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{\text{CFL}}{2} & 1+\text{CFL} & \frac{\text{CFL}}{2} \\ & & & & -\frac{\text{CFL}}{2} & 1+\text{CFL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \\ \phi_3^n \\ \vdots \\ \phi_{N-1}^n \\ \phi_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^{n-1} \\ \phi_2^{n-1} \\ \phi_3^{n-1} \\ \vdots \\ \phi_{N-1}^{n-1} \\ \phi_N^{n-1} \end{bmatrix}$$

همواره پایدار

روش ضمنی کرنک نیکلسون – مرتبه دو مکانی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

گسسته‌سازی مرکزی مکان

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{\Delta t} = -c\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|^n + \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|^{n-1}\right)$$

$$\frac{\phi_i^n - \phi_i^{n-1}}{\Delta t} = -c\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\phi_{i+1}^{n-1} - \phi_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x}\right)$$

$$\boxed{O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$$

$$\boxed{-\frac{\mathrm{CFL}}{4}\phi_{i-1}^n + \phi_i^n + \frac{\mathrm{CFL}}{4}\phi_{i+1}^n = \frac{\mathrm{CFL}}{4}\phi_{i-1}^{n-1} + \phi_i^{n-1} - \frac{\mathrm{CFL}}{4}\phi_{i+1}^{n-1}}$$

همواره پایدار

روش صریح اویلر – بادسو مرتبه اول

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

روش صریح اویلر و بادسوی مرتبه اول

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{\phi}}{\mathrm{d}t}\right|^{t=t_n} = -\frac{c}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) \qquad \phi_e = \bar{\phi}_i + O(\Delta x)$$

$$\frac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\phi}_i^n}{\Delta t} = -\frac{c}{\Delta x}(\bar{\phi}_i^n - \bar{\phi}_{i-1}^n) \qquad \boxed{O(\Delta t, \Delta x)}$$

$$\boxed{\bar{\phi}_i^{n+1} = \bar{\phi}_i^n - \mathrm{CFL}(\bar{\phi}_i^n - \bar{\phi}_{i-1}^n)}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL} \le 1}$

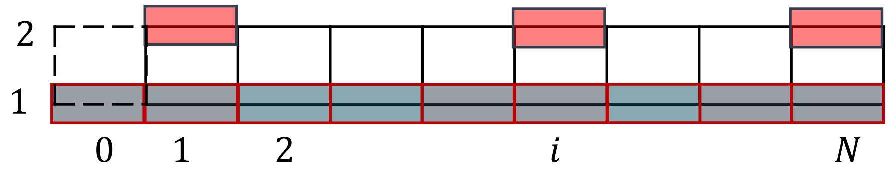
روش صریح اویلر – بادسو مرتبه اول

شرط مرزی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$\phi(0,t) = g(t)$ شرط مرزی دیریشله

$$\boxed{\bar{\phi}_0^n = \phi_w \Big|_{i=1}^{t=t_n} = g(t_n)} \qquad \bar{\phi}_N^{n+1} = \bar{\phi}_N^n(1-\mathrm{CFL}) + \mathrm{CFL}\bar{\phi}_{N-1}^n$$

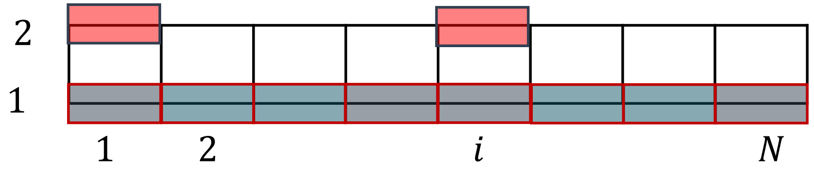


$\phi(x,t) = \phi(x-l,t)$ شرط مرزی متناوب

$$\bar{\phi}_i^n = \bar{\phi}_{i-N}^n$$

$$\bar{\phi}_0^n = \bar{\phi}_N^n$$

$$\boxed{\bar{\phi}_1^{n+1} = \bar{\phi}_1^n(1-\mathrm{CFL}) + \mathrm{CFL}\bar{\phi}_N^n}$$



روش صریح لکس

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{\phi}}{\mathrm{dt}}\right|^{t=t_n} = -\frac{c}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) \qquad \phi_e = \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\bar{\phi}_i^n = \frac{\bar{\phi}_{i+1}^n + \bar{\phi}_{i-1}^n}{2} \qquad \frac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \frac{\bar{\phi}_{i+1}^n + \bar{\phi}_{i-1}^n}{2}}{\Delta t} = -\frac{c}{\Delta x}\left(\frac{\bar{\phi}_{i+1}^n - \bar{\phi}_{i-1}^n}{2}\right) \qquad \boxed{O(\Delta t, \Delta x^2)}$$

$$\boxed{\bar{\phi}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{\phi}_{i+1}^n + \bar{\phi}_{i-1}^n) + \frac{\mathrm{CFL}}{2}(\bar{\phi}_{i+1}^n - \bar{\phi}_{i-1}^n)}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL} \le 1}$

روش صریح لکس-وندروف

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\partial \phi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - c\frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta t + \frac{1}{2}c^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Delta t^2$$

$$\bar{\phi}_i^{n+1} = \bar{\phi}_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) + \frac{1}{2}\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x}\left(\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_e - \left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_w\right)$$

$$\phi_e = \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right|_e = \frac{-\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\bar{\phi}_i^{n+1} = \bar{\phi}_i^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{\bar{\phi}_{i+1}^n - \bar{\phi}_{i-1}^n}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{c^2\Delta t^2}{\Delta x}\left(\frac{\bar{\phi}_{i+1}^n - 2\bar{\phi}_i^n + \bar{\phi}_{i-1}^n}{\Delta x}\right)$$

$$\boxed{\bar{\phi}_i^{n+1} = \bar{\phi}_i^n - \frac{\mathrm{CFL}}{2}(\bar{\phi}_{i+1}^n - \bar{\phi}_{i-1}^n) + \frac{\mathrm{CFL}^2}{2}(\bar{\phi}_{i+1}^n - 2\bar{\phi}_i^n + \bar{\phi}_{i-1}^n)}$$

$$\boxed{O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL} \leq 1}$

معادلات هذلولی

حجم محدود

روش‌های لکس و لکس-وندروف

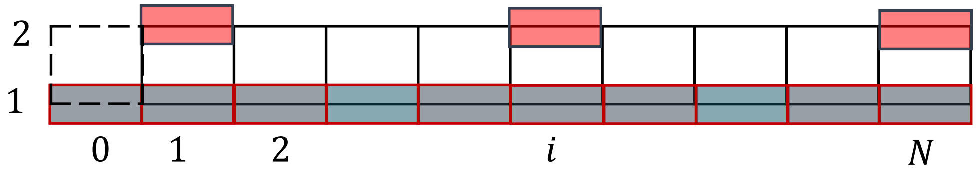
شرط مرزی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

$$\phi(0,t) = g(t)$$

شرط مرزی دیریشله

$$\frac{\bar{\phi}_0^n + \bar{\phi}_1^n}{2} = g(t_n)$$



$$\phi_e\Big|_N = \frac{-\bar{\phi}_{N-1} + 3\bar{\phi}_N}{2}$$

روش بادسو مرتبه دو

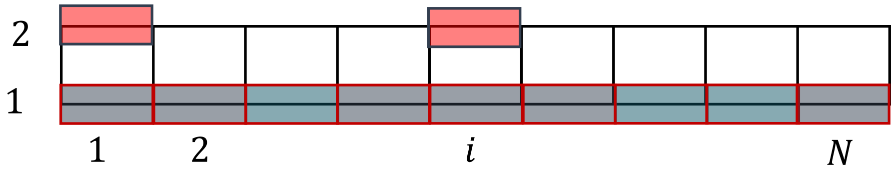
$$\phi(x,t) = \phi(x-l,t)$$

شرط مرزی متناوب (روش لکس)

$$\bar{\phi}_0^n = \bar{\phi}_N^n$$

$$\bar{\phi}_1^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{\phi}_2^n + \bar{\phi}_N^n) + \frac{\text{CFL}}{2}(\bar{\phi}_2^n - \bar{\phi}_N^n)$$

$$\bar{\phi}_N^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{\phi}_1^n + \bar{\phi}_{N-1}^n) + \frac{\text{CFL}}{2}(\bar{\phi}_1^n - \bar{\phi}_{N-1}^n)$$



معادلات هذلولوی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

روش صریح اویلر – پسرو مرتبه یک مکانی

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \mathrm{CFL}(\phi_i^n - \phi_{i-1}^n)$$

$\boxed{O(\Delta t, \Delta x)}$ $\boxed{\mathrm{CFL} \le 1}$

روش صریح لکس (Lax)

$$\phi_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^n) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n)$$

$\boxed{O(\Delta t, \Delta x^2)}$ $\boxed{\mathrm{CFL} \le 1}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad c > 0 \qquad 0 \leq x \leq l \qquad t \geq 0$$

روش صریح لکس-وندروف (Lax-Wendroff)

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\text{CFL}}{2}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{\text{CFL}^2}{2}(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)$$

$\boxed{O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$ $\boxed{\text{CFL} \leq 1}$

روش صریح رانج-کوتا مرتبه دو (RK2)

$$\begin{cases} \dfrac{\phi_i^{n+\frac{1}{2}} - \phi_i^n}{\Delta t/2} = -\dfrac{c}{\Delta x}\left(\dfrac{3\phi_i^n - 4\phi_{i-1}^n + \phi_{i-2}^n}{2}\right) \\ \dfrac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} = -\dfrac{c}{\Delta x}\left(\dfrac{3\phi_i^{n+\frac{1}{2}} - 4\phi_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \phi_{i-2}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right) \end{cases}$$

$\boxed{O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$

$\boxed{\text{CFL} \leq 0.5}$

روش صریح رانج-کوتا مرتبه دو

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

گسسته‌سازی بادسو مرتبه ۲ مکان

$$\begin{cases} \phi_e = \dfrac{-\bar{\phi}_{i-1} + 3\bar{\phi}_i}{2} \\ \phi_w = \dfrac{-\bar{\phi}_{i-2} + 3\bar{\phi}_{i-1}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{\phi}_i^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\phi}_i^n}{\Delta t/2} = -\dfrac{c}{\Delta x}(\phi_e^n - \phi_w^n) \\ \dfrac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\phi}_i^n}{\Delta t} = -\dfrac{c}{\Delta x}\left(\phi_e^{n+\frac{1}{2}} - \phi_w^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{\phi}_i^{n+\frac{1}{2}} - \bar{\phi}_i^n}{\Delta t/2} = -\dfrac{c}{\Delta x}\left(\dfrac{3\bar{\phi}_i^n - 4\bar{\phi}_{i-1}^n + \bar{\phi}_{i-2}^n}{2}\right) \\ \dfrac{\bar{\phi}_i^{n+1} - \bar{\phi}_i^n}{\Delta t} = -\dfrac{c}{\Delta x}\left(\dfrac{3\bar{\phi}_i^{n+\frac{1}{2}} - 4\bar{\phi}_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \bar{\phi}_{i-2}^{n+\frac{1}{2}}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$$

شرط پایداری $\boxed{\mathrm{CFL} \le 0.5}$

معادلات هذلولوی

حجم محدود

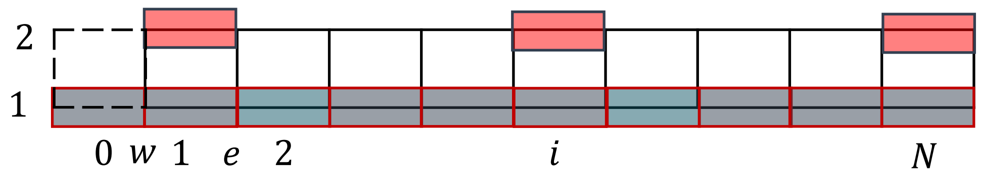
روش رانج-کوتا مرتبه دو

شرط مرزی

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \qquad c>0 \qquad 0\le x\le l \qquad t\ge 0$$

$$\phi(0,t)=g(t)$$

شرط مرزی دیریشله



$$\frac{\bar{\phi}_0^n+\bar{\phi}_1^n}{2}=g(t_n)$$

$$\boxed{\phi_e\Big|_{i=0}=\frac{-\bar{\phi}_0+3\bar{\phi}_1}{2}}$$

روش بادسو مرتبه دو

$$\boxed{\phi_w\Big|_{i=1}=g(t_n)}$$

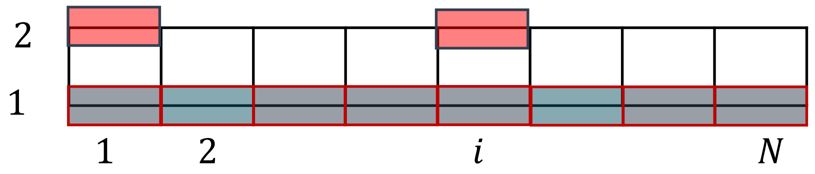
$$\phi(x,t)=\phi(x-l,t)$$

شرط مرزی متناوب

$$\bar{\phi}_0^n=\bar{\phi}_N^n$$

$$\bar{\phi}_{-1}^n=\bar{\phi}_{N-1}^n$$

$$\boxed{\frac{\bar{\phi}_1^{n+\frac{1}{2}}-\bar{\phi}_1^n}{\Delta t/2}=-\frac{c}{\Delta x}\left(\frac{3\bar{\phi}_1^n-4\bar{\phi}_N^n+\bar{\phi}_{N-1}^n}{2}\right)}$$



حجم محدود

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c > 0 \qquad 0 \le x \le l \qquad t \ge 0$$

روش ضمنی اویلر – بادسو مرتبه یک

$$\bar{\phi}_i^n(1+\mathrm{CFL}) - \mathrm{CFL}\bar{\phi}_{i-1}^n = \bar{\phi}_i^{n-1} \qquad O(\Delta t, \Delta x) \qquad \mathrm{CFL} \le 1$$

روش ضمنی اویلر – مرکزی مرتبه دو

$$-\frac{\mathrm{CFL}}{2}\bar{\phi}_{i-1}^n + \bar{\phi}_i^n + \frac{\mathrm{CFL}}{2}\bar{\phi}_{i+1}^n = \bar{\phi}_i^{n-1} \qquad O(\Delta t, \Delta x^2)$$

همواره پایدار

روش ضمنی کرنک نیکلسون – مرتبه دو مکانی

$$-\frac{\mathrm{CFL}}{4}\bar{\phi}_{i-1}^n + \phi_i^n + \frac{\mathrm{CFL}}{4}\bar{\phi}_{i+1}^n = \frac{\mathrm{CFL}}{4}\bar{\phi}_{i-1}^{n-1} + \bar{\phi}_i^{n-1} - \frac{\mathrm{CFL}}{4}\bar{\phi}_{i+1}^{n-1}$$

$$O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

همواره پایدار

مثال

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad c = 0.1 \qquad t \geq 0$$

$$\phi(x,0) = f(x)$$

$\phi(x,t) = \phi(x-l,t)$ شرط مرزی متناوب $l = 2$ $0 \leq x \leq 2$

$$\phi_{\text{exact}}(x,t) = f(x-ct)$$

$$T = \frac{l}{c} = 20$$

۱. روش صریح اویلر – پسرو مرتبه یک مکان $\boxed{\text{CFL} \leq 1}$

۲. روش لکس وندروف $\boxed{\text{CFL} \leq 1}$

۳. روش رانج کوتا مرتبه ۲ – پسرو مرتبه دو مکان $\boxed{\text{CFL} \leq 0.5}$

$$\phi(x,0) = \begin{cases} 1.\sin(\pi x) \\ 2.\operatorname{sgn}(x-1) \end{cases}$$

روش مشاهده شوک

روش‌های مهار ناپیوستگی (Shock-Capturing)

پدیده شوک، مسائل چندفاز و ...

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

خطای بریدگی روش صریح اویلر – پسرو مرتبه یک مکانی

$$\frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} + c\left(\frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x}\right) = 0$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \Delta t\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_i^n + \frac{(\Delta t)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_i^n + \frac{(\Delta t)^3}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}\right)_i^n + \cdots$$

$$\phi_{i-1}^n = \phi_i^n - \Delta x\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{(\Delta x)^3}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i^n + \cdots$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_i^n + c\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i^n}_{\text{PDE}} = \underbrace{-\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right)_i^n - \frac{(\Delta t)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}\right)_i^n + \frac{c\Delta x}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_i^n - \frac{c(\Delta x)^2}{6}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_i^n + \cdots}_{\mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)}$$

روش مشاهده شوک

$$\frac{\partial}{\partial t}: \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + c\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} = -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3} - \frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^4\phi}{\partial t^4} + \frac{c\Delta x}{2}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial t} - \frac{c(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^3\partial t} + \cdots$$

$$c\frac{\partial}{\partial x}: \quad c\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x} + c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\frac{c\Delta t}{2}\frac{\partial^3\phi}{\partial t^2\partial x} - \frac{c(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^4\phi}{\partial t^3\partial x} + \frac{c^2\Delta x}{2}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} - \frac{c^2(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3} + c\frac{\partial^3\phi}{\partial t^2\partial x} + \mathcal{O}(\Delta t)\right) + \frac{\Delta x}{2}\left(c\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial t} - c^2\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}: \quad \frac{\partial^3\phi}{\partial t^3} = c^2\frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial t} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad \frac{\partial^3\phi}{\partial x^2\partial t} = -c\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$$

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3} = -c^3\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \quad \frac{\partial^3\phi}{\partial t^2\partial x} = c^2\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + c^2(c\Delta t - \Delta x)\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t)$$

روش مشاهده شوک

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\frac{(\Delta t)^2}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}+\frac{c\Delta x}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{c(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+\cdots$$

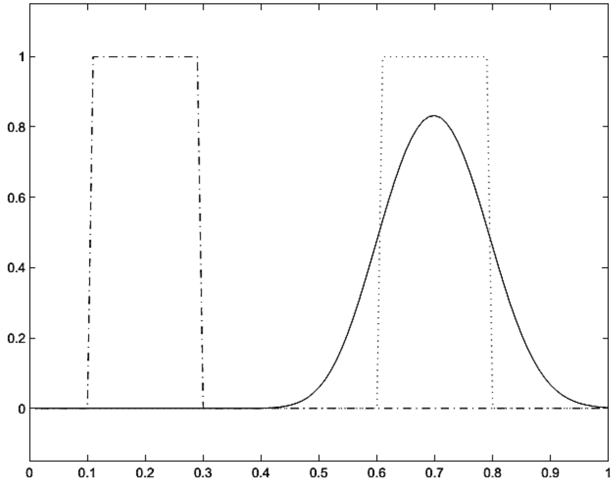
$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{\Delta t}{2}\left(c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+c^2(c\Delta t-\Delta x)\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)-\frac{(\Delta t)^2}{6}\left(-c^3\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)+\frac{c\Delta x}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\frac{c(\Delta x)^2}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+\cdots$$

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t}+c\frac{\partial\phi}{\partial x}=\underbrace{\frac{c\Delta x}{2}(1-\mathrm{CFL})\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}}_{\text{Numerical Diffusion}}+\underbrace{\frac{c(\Delta x)^2}{6}(-1+3\mathrm{CFL}-2\mathrm{CFL}^2)\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}}_{\text{Numerical Disspertion}}+\cdots}$$

Numerical Diffusion

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4},\cdots$$

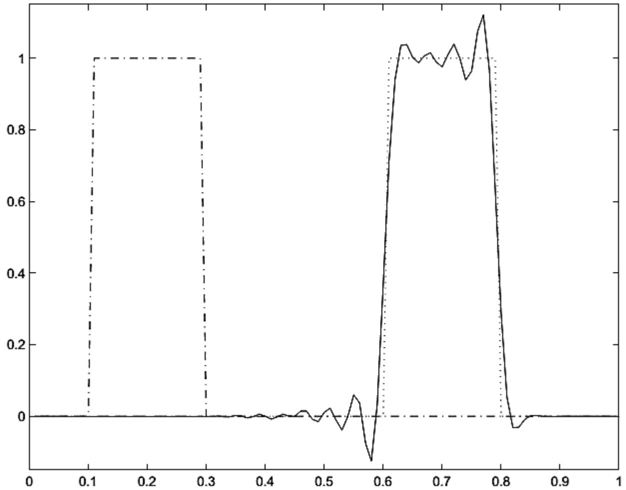
خطای دامنه



Numerical Disspertion

$$\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3},\frac{\partial^5\phi}{\partial x^5},\cdots$$

خطای فاز



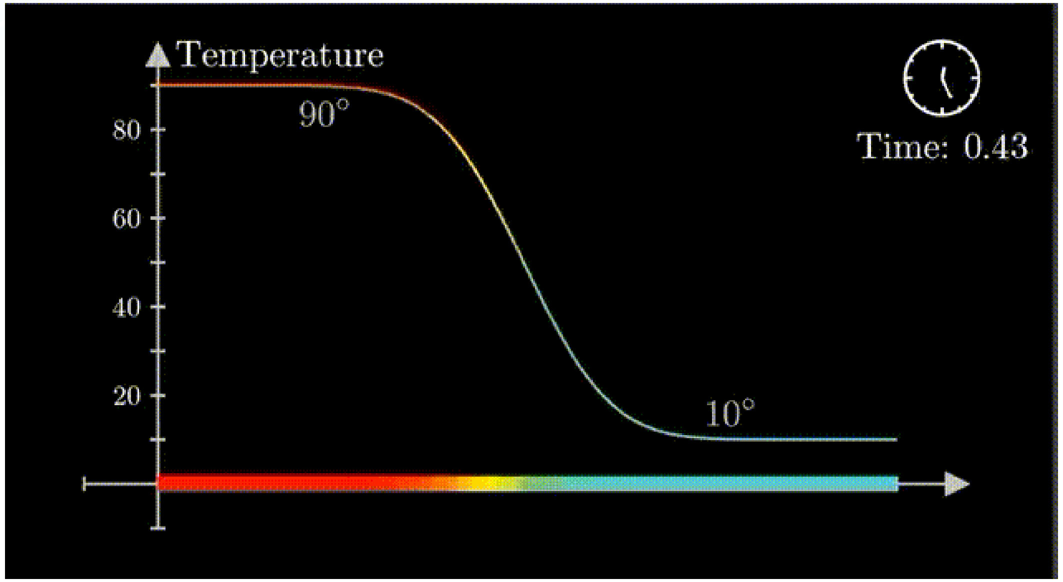
معادلات هذلولوی

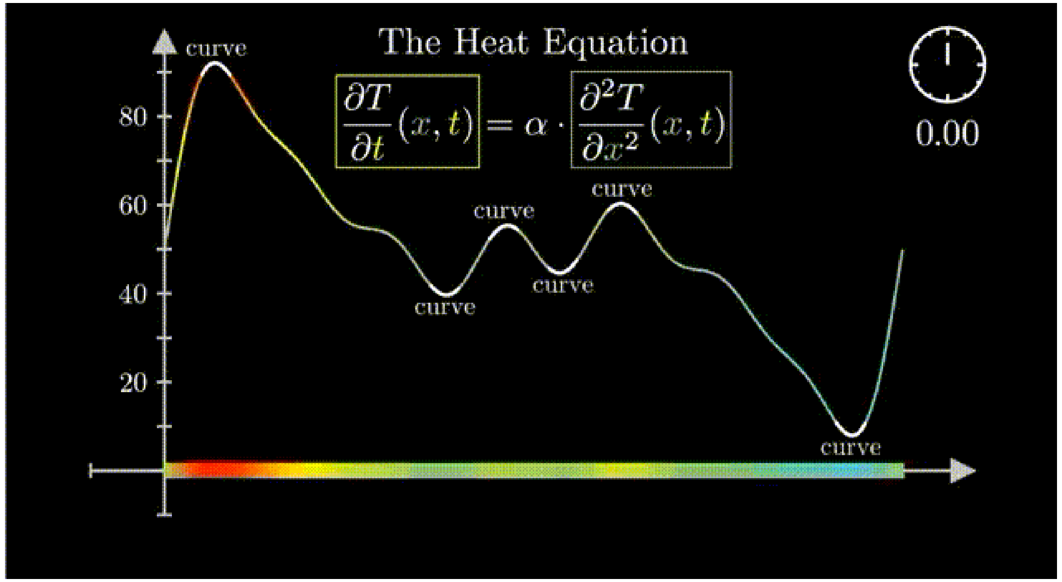
روش مشاهده شوک

روش صریح اویلر – پسرو مرتبه یک مکانی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{c\Delta x}{2}(1 - \mathrm{CFL})\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \cdots$$





روش صریح لکس وندروف

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{c(\Delta x)^2}{6}(1 - \mathrm{CFL}^2)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} - \frac{c(\Delta x)^3}{8}\mathrm{CFL}(1 - \mathrm{CFL}^2)\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{c(\Delta x)^4}{120}(1 + 5\mathrm{CFL}^2 - 6\mathrm{CFL}^4)\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5} + \cdots$$

روش مشاهده شوک

روش صریح لکس-وندروف

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = \underbrace{-\frac{c(\Delta x)^2}{6}(1-\mathrm{CFL}^2)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \cdots}_{\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\mathrm{CFL}}{2}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{\mathrm{CFL}^2}{2}(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)$$

استفاده از پخش مصنوعی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = \epsilon\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\frac{\partial \phi}{\partial x} = \underbrace{\epsilon\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(\Delta x)^2 - \frac{c(\Delta x)^2}{6}(1-\mathrm{CFL}^2)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \cdots}_{\mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2)}$$

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\mathrm{CFL}}{2}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \left(\frac{\mathrm{CFL}^2}{2} + \epsilon\right)(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n)$$

خسته نباشید