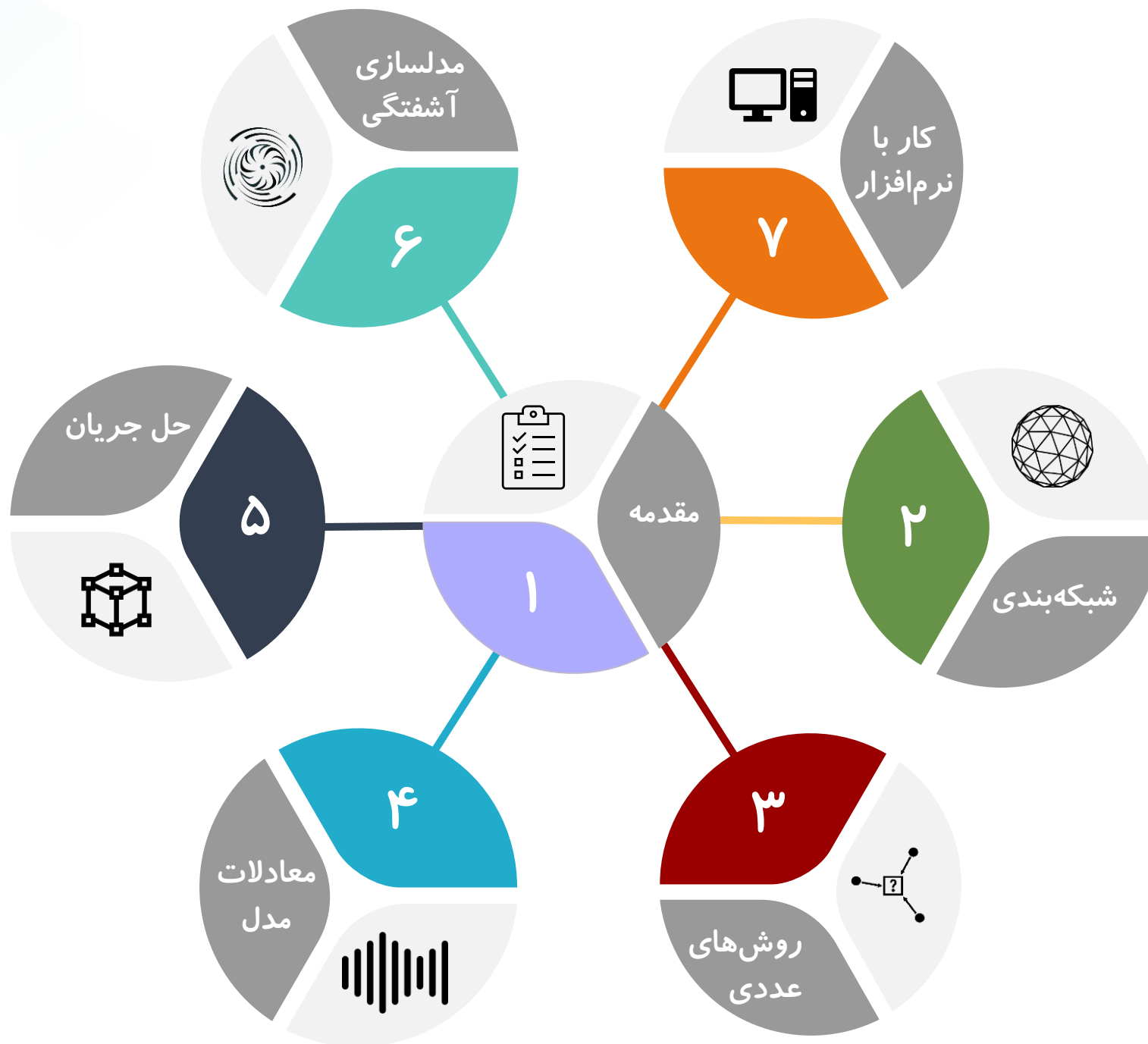


دینامیک سیالات محاسباتی

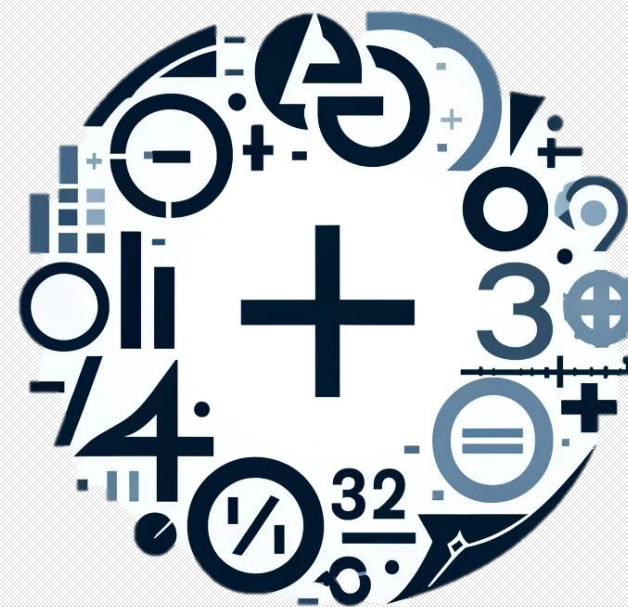


محمدصادق کریمی



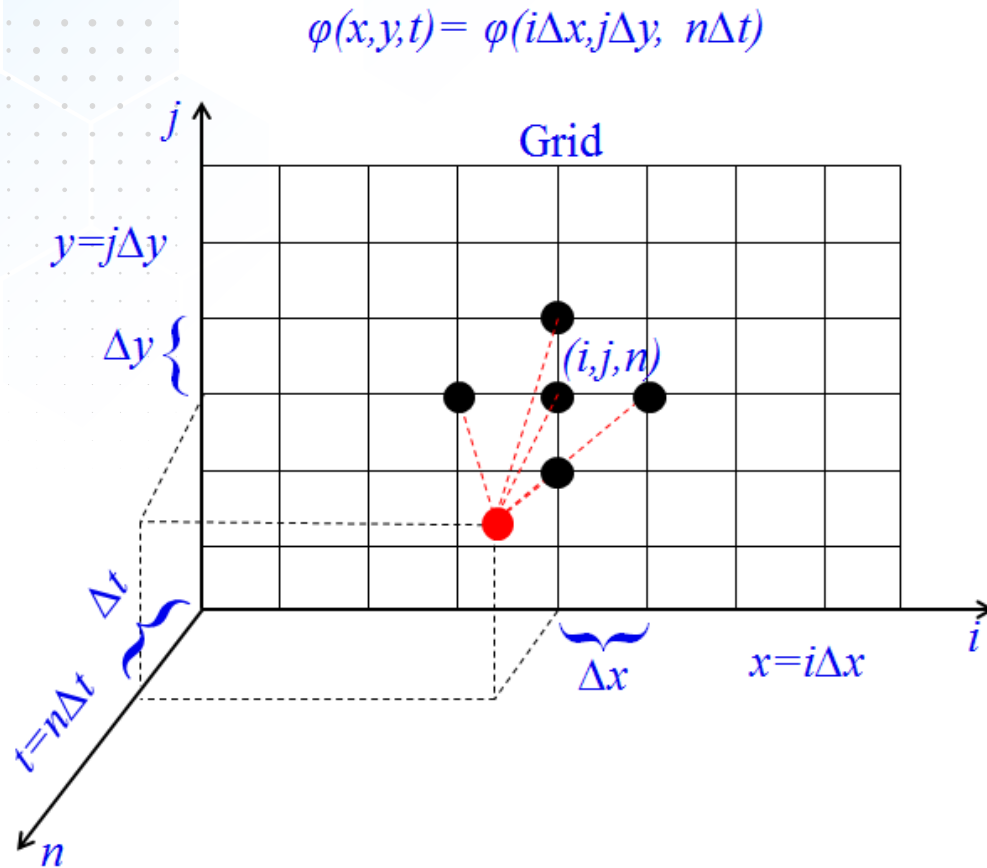
۳

روش های عددی





مقدمه



- اولین قدم در بدست آوردن حل عددی و گسسته‌سازی معادلات: گسسته سازی میدان حل یا تعریف شبکه حل عددی به صورت مجموعه‌ای از نقاط.
- هر نقطه یک مجهول دارد که مقدار تابع در آن نقطه است و نیاز به یک معادله جبری دارد که رابطه‌ای بین مقدار تابع در نقطه مورد نظر با مقدار آن در نقاط همسایه است.
- رویکرد این روش، جایگزینی مشتقات جزئی در معادله حاکم با استفاده از تقریبات تفاضل محدود است.
 - ✓ بسط تیلور
 - ✓ روش چندجمله‌ای
- به تعداد مجهولات، معادله مورد نیاز است.





مثال

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

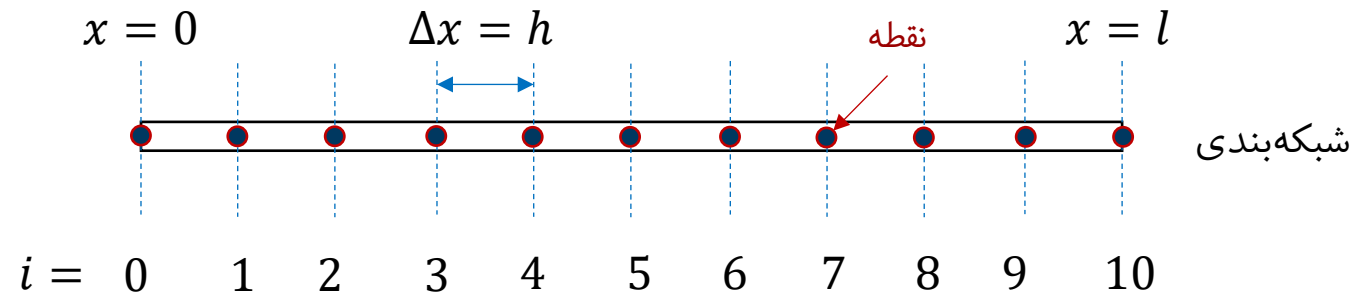
دامنه حل و شرایط مرزی

$$0 \leq x \leq l$$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad \phi(l) = \phi_l$$

$$N = 10$$

$$h = \Delta x = \frac{l}{N}$$

مجهولات: $\phi_i |_{i=1,2,\dots,9}$ میدان پاسخ: $\phi_i |_{i=0,1,\dots,10}$

هدف: بدست آوردن تقریبی مشتق‌های

اول و دوم بر حسب مقدار توابع

معادلات: نوشتن معادله حاکم در این ۹ نقطه

شرایط مرزی: $\phi_i |_{i=0,10}$ 



محاسبه مشتقات جزئی

بسط سری تیلور

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots$$

بسط چند جمله‌ای یک تابع تحلیلی

$$a_0 = f(x_0)$$

مقدار تابع در نقطه $x = x_0$

$$f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, f'''(x_0) = 3!a_3, \dots$$

مشتق‌گیری در نقطه $x = x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + \frac{f''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$





بسط سری تیلور

$$x_{i+1} = x + \Delta x: f(x + \Delta x) = f(x) + f'(\Delta x) + \frac{f''}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^3 + \dots$$

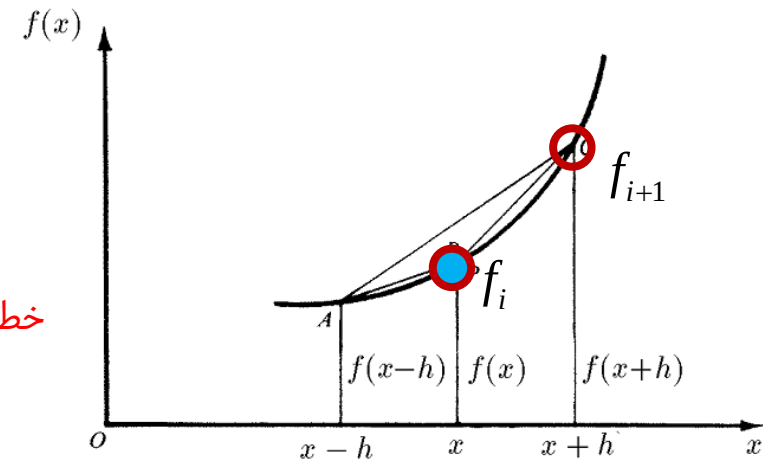
$$\Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f' + \frac{f''}{2!}\Delta x + \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^2 + \dots$$

$$f' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{f''}{2!}\Delta x - \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^2 + \dots$$

خطای برشی (Truncation Error)

تفاضل محدود

جمله مرتبه پیشرو (Leading Order Term) $\Delta x \propto 1$



تقریب مرتبه اول مشتق اول

(First Order Approximation)

$$f' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)^{p=1}$$

تفاضل پیشرو یا رو به جلو (Forward Differencing)

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

$$\Delta x = h$$





بسط سری تیلور

$$x_{i-1} = x - \Delta x: f(x - \Delta x) = f(x) - f'(\Delta x) + \frac{f''}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^3 + \dots$$

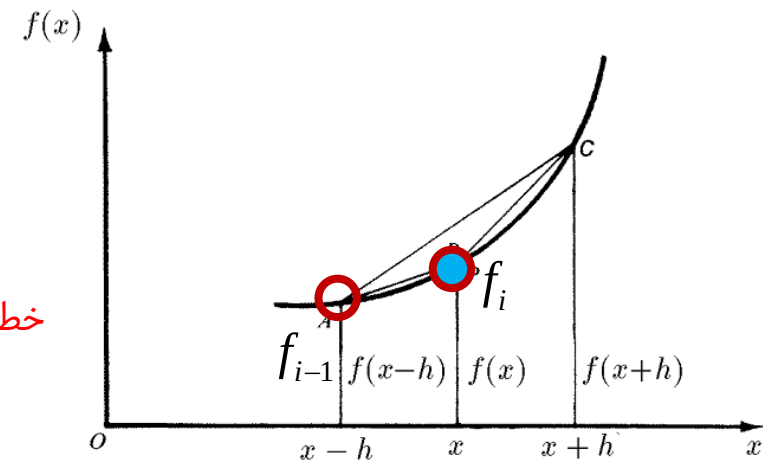
$$\Rightarrow \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = f' - \frac{f''}{2!}\Delta x + \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^2 + \dots$$

$$f' = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f''}{2!}\Delta x - \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^2 + \dots$$

خطای برشی (Truncation Error)

تفاضل محدود

جمله مرتبه پیشرو (Leading Order Term) $\Delta x \propto 1$



تقریب مرتبه اول مشتق اول

(First Order Approximation)

$$f' = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)^{p=1}$$

تفاضل پسرو یا رو به عقب (Backward Differencing)

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h)$$

$$\Delta x = h$$





بسط سری تیلور

$$x_{i-1} = x - \Delta x: f(x - \Delta x) = f(x) - f'(\Delta x) + \frac{f''}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^3 \dots$$

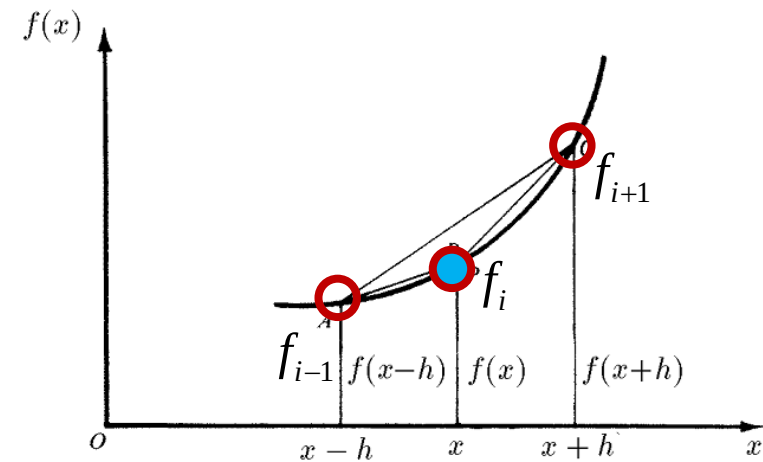
$$x_{i+1} = x + \Delta x: f(x + \Delta x) = f(x) + f'(\Delta x) + \frac{f''}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^3 \dots$$

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2f'\Delta x + \frac{\Delta x^3}{3!}f'''\dots$$

$$f' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^3}{3!}f'''\dots$$

خطای برشی (Truncation Error)

تفاضل محدود



تقریب مرتبه دوم مشتق اول

$$f' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

Second Order)

تفاضل مرکزی (Central Differencing)

(Approximation)

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

$$\Delta x = h$$





محاسبه مشتقات جزئی

بسط سری تیلور

$$x_{i-1} = x - \Delta x: f(x - \Delta x) = f(x) - f'(\Delta x) + \frac{f''}{2!}(\Delta x)^2 - \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^3 \dots$$

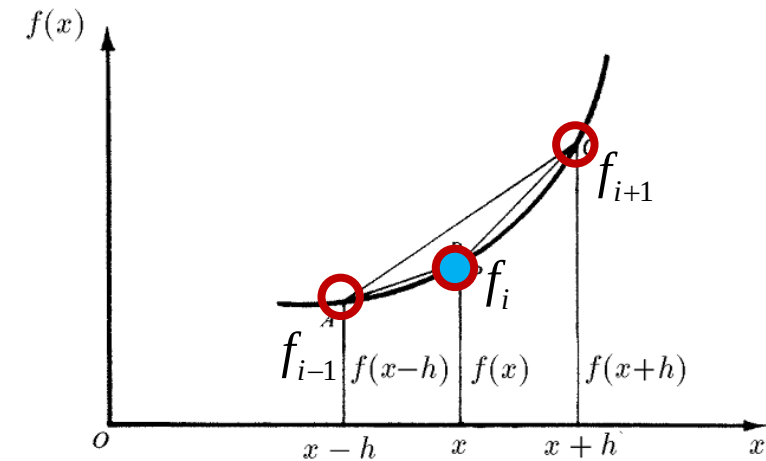
$$x_{i+1} = x + \Delta x: f(x + \Delta x) = f(x) + f'(\Delta x) + \frac{f''}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''}{3!}(\Delta x)^3 \dots$$

$$\Rightarrow f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x) = \Delta x^2 f'' + \frac{2\Delta x^4}{4!} f''' + \dots$$

$$\Rightarrow f'' = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta x^2}{4!} f''' + \dots$$

تفاضل محدود

خطای برشی (Truncation Error)



تقریب مرتبه دوم مشتق دوم
(Second Order)

$$f'' = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

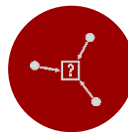
تفاضل مرکزی (Central Differencing)



(Approximation)
دانشگاه صنعتی شریف

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

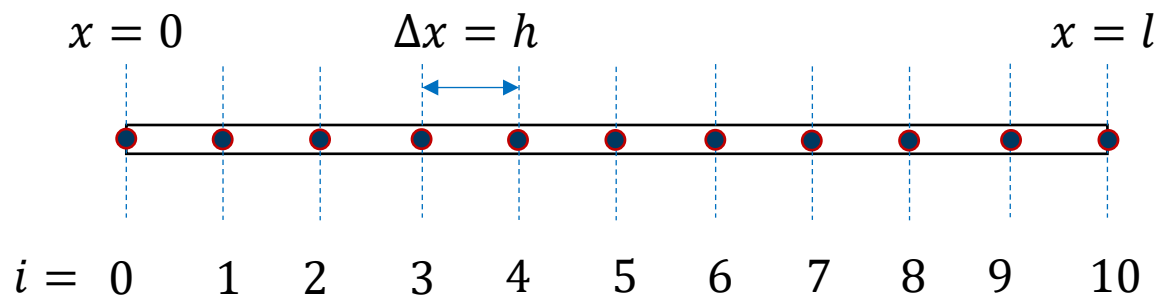
$$\Delta x = h$$



بسط سری تیلور

معادله دیفرانسیل $\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$

$\phi_0 = \phi(x=0)$ $\phi_{10} = \phi(x=l)$



$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} + \phi_i \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} = \cos \pi x_i, \quad i=1, 2, \dots, 9$$

$O(h^2)$ $O(h)$

$O(h)$

$$\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} + \phi_i \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} = \cos \pi x_i, \quad i=1, 2, \dots, 9$$

$O(h^2)$ $O(h^2)$

$O(h^2)$





محاسبه مشتقات جزئی

بسط سری تیلور

محاسبه مشتق مورد نظر با دقت دلخواه

مشتق اول پیشرو با دقت مرتبه ۲

$$\text{درجه دقت} + \text{مرتبه مشتق} = \text{تعداد نقاط مورد نظر}$$

تفاضل پیشرو و پسرو

$$\text{یک} - \text{درجه دقت} + \text{مرتبه مشتق} = \text{تعداد نقاط مورد نظر}$$

تفاضل مرکزی

مرتبه دقت تفاضل مرکزی عددی زوج است

در تفاضل مرکزی اگر تعداد زوج باشد یعنی خود نقطه حضور ندارد





محاسبه مشتقات جزئی

بسط سری تیلور

مشتق اول پیشرو با دقت مرتبه ۲

تعداد نقاط مورد نیاز برابر است با $3 = 2 + 1$

$$f'_i = \frac{af_i + bf_{i+1} + cf_{i+2}}{h} + O(h^2)$$

$$f_i = f_i$$

$$f_{i+1} = f_i + f'_i h + \frac{f''_i}{2!} h^2 + \frac{f'''_i}{3!} h^3 \dots$$

~~$$f_{i+2} = f_{i+1} + f'_{i+1} h + \frac{f''_{i+1}}{2!} h^2 + \frac{f'''_{i+1}}{3!} h^3 \dots$$~~

$$f_{i+2} = f_i + f'_i(2h) + \frac{f''_i}{2!} (2h)^2 + \frac{f'''_i}{3!} (2h)^3 \dots$$





محاسبه مشتقات جزئی

بسط سری تیلور

مشتق اول پیشرو با دقت مرتبه ۲

تعداد نقاط مورد نیاز برابر است با $3 = 2 + 1$

$$f'_i = \frac{af_i + bf_{i+1} + cf_{i+2}}{h} + O(h^2)$$

$$\frac{a}{h} f_i = \frac{a}{h} f_i$$

$$\frac{b}{h} f_{i+1} = \frac{b}{h} f_i + \frac{b}{h} f_i' h + \frac{b}{h} \frac{f_i''}{2!} h^2 + \frac{b}{h} \frac{f_i'''}{3!} h^3 \dots$$

$$\frac{c}{h} f_{i+2} = \frac{c}{h} f_i + \frac{c}{h} f_i'(2h) + \frac{c}{h} \frac{f_i''}{2!} (2h)^2 + \frac{c}{h} \frac{f_i'''}{3!} (2h)^3 \dots$$





بسط سری تیلور

$$\frac{af_i + bf_{i+1} + cf_{i+2}}{h} = f_i\left(\frac{a+b+c}{h}\right) + f'_i\left(\frac{b+2c}{h}\right)h + f''_i\left(\frac{b+4c}{2h}\right)h^2 + f'''_i\left(\frac{b+8c}{6h}\right)h^3 + \dots$$

$$f'_i - O(h^2) = f_i\left(\frac{a+b+c}{h}\right) + f'_i\left(\frac{b+2c}{h}\right)h + f''_i\left(\frac{b+4c}{2h}\right)h^2 + f'''_i\left(\frac{b+8c}{6h}\right)h^3 + \dots$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 1 \\ b + 4c = 0 \end{cases} \rightarrow b = -4c \rightarrow -2c = 1 \rightarrow c = -\frac{1}{2} \rightarrow b = 2 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$f'_i = \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2h} + O(h^2)$$





محاسبه مشتقات جزئی

بسط سری تیلور

مشتق دوم مرکزی با دقت مرتبه ۲

تعداد نقاط مورد نیاز برابر است با $3 = 2 + 2 - 1$

$$f_i'' = \frac{af_{i-1} + bf_i + cf_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$f_{i-1} = f_i - f_i' h + \frac{f_i''}{2!} h^2 - \frac{f_i'''}{3!} h^3 \dots$$

$$f_i = f_i$$

$$f_{i+1} = f_i + f_i' h + \frac{f_i''}{2!} h^2 + \frac{f_i'''}{3!} h^3 \dots$$





بسط سری تیلور

مشتق دوم مرکزی با دقت مرتبه ۲

تعداد نقاط مورد نیاز برابر است با $3 = 2 + 2 - 1$

$$f_i'' = \frac{af_{i-1} + bf_i + cf_{i+1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{a}{h^2} f_{i-1} = \frac{a}{h^2} f_i - \frac{a}{h^2} f_i' h + \frac{a}{h^2} \frac{f_i''}{2!} h^2 - \frac{a}{h^2} \frac{f_i'''}{3!} h^3 \dots$$

$$\frac{b}{h^2} f_i = \frac{b}{h^2} f_i$$

$$\frac{c}{h^2} f_{i+1} = \frac{c}{h^2} f_i + \frac{c}{h^2} f_i' h + \frac{c}{h^2} \frac{f_i''}{2!} h^2 + \frac{c}{h^2} \frac{f_i'''}{3!} h^3 \dots$$





بسط سری تیلور

$$\frac{af_{i-1} + bf_i + cf_{i+1}}{h^2} = f_i\left(\frac{a+b+c}{h^2}\right) + f'_i\left(\frac{-a+c}{h^2}\right)h + f''\left(\frac{a+c}{2h^2}\right)h^2 + f'''\left(\frac{a-c}{6h^2}\right)h^3 + \dots$$

$$f''_i - O(h^2) = f_i\left(\frac{a+b+c}{h^2}\right) + f'_i\left(\frac{-a+c}{h}\right) + f''\left(\frac{a+c}{2}\right) + f'''\left(\frac{a-c}{6}\right)h + \dots$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+c=0 \\ a+c=1 \end{cases} \rightarrow a=c \rightarrow 2c=1 \rightarrow c=\frac{1}{2} \rightarrow a=\frac{1}{2} \rightarrow b=-1$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2h^2} + O(h^2)$$





محاسبه مشتقات جزئی

بسط سری تیلور

$$f_i''' = \frac{af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_{i+1} + df_{i+2}}{h^3} + O(h^2)$$

مشتق سوم مرکزی با دقت مرتبه ۱

تعداد نقاط مورد نیاز برابر است با $4 = 3 + (1+1) - 1$

$$\frac{a}{h^3} f_{i-2} = \frac{a}{h^3} f_i - \frac{a}{h^3} f_i'(2h) + \frac{a}{h^3} \frac{f_i''}{2!} (2h)^2 - \frac{a}{h^3} \frac{f_i'''}{3!} (2h)^3 \dots$$

$$\frac{b}{h^3} f_{i-1} = \frac{b}{h^3} f_i - \frac{b}{h^3} f_i' h + \frac{b}{h^3} \frac{f_i''}{2!} h^2 - \frac{b}{h^3} \frac{f_i'''}{3!} h^3 \dots$$

$$\frac{c}{h^3} f_{i+1} = \frac{c}{h^3} f_i + \frac{c}{h^3} f_i' h + \frac{c}{h^3} \frac{f_i''}{2!} h^2 + \frac{c}{h^3} \frac{f_i'''}{3!} h^3 \dots$$

$$\frac{d}{h^3} f_{i+2} = \frac{d}{h^3} f_i + \frac{d}{h^3} f_i'(2h) + \frac{d}{h^3} \frac{f_i''}{2!} (2h)^2 + \frac{d}{h^3} \frac{f_i'''}{3!} (2h)^3 \dots$$

$$\frac{e}{h^2} f_i = \frac{e}{h^2} f_i$$





بسط سری تیلور

$$\frac{af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_{i+1} + df_{i+2}}{h^3} = f_i\left(\frac{a+b+c+d}{h^3}\right) + f'_i\left(\frac{-2a-b+c+2d}{h^3}\right)h + f''_i\left(\frac{4a+b+c+4d}{h^3}\right)\frac{h^2}{2} + f'''_i\left(\frac{-8a-b+c+8d}{h^3}\right)\frac{h^3}{6} + f''''_i\left(\frac{16a+b+c+16d}{h^3}\right)\frac{h^4}{24} \dots$$

$$f_i''' - O(h^2) = f_i\left(\frac{a+b+c+d}{h^3}\right) + f'_i\left(\frac{-2a-b+c+2d}{h^2}\right) + f''_i\left(\frac{4a+b+c+4d}{2h}\right) + f'''_i\left(\frac{-8a-b+c+8d}{6}\right) + \dots$$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -2a - b + c + 2d = 0 \\ 4a + b + c + 4d = 0 \\ -8a - b + c + 8d = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3b - 3c = 6 \\ 3b + 3c = 0 \end{cases} \rightarrow c = -b \rightarrow 6b = 6 \rightarrow b = 1 \rightarrow c = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \rightarrow d = \frac{1}{2}$$



$$f_i''' = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2h^2} + O(h^2)$$



محاسبه مشتقات جزئی

تفاضل مرکزی

Order of derivative	Order of accuracy	بسط سری تیلور								
		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	∞	1								
1	2				$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$			
	4			$\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
	6		$-\frac{1}{60}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{60}$	
	8	$\frac{1}{280}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{105}$	$-\frac{1}{280}$
2	2				1	-2	1			
	4			$-\frac{1}{12}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$		
	6		$\frac{1}{90}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$	
	8	$-\frac{1}{560}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$
3	2			$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	$\frac{1}{2}$		
	4		$\frac{1}{8}$	-1	$\frac{13}{8}$	0	$-\frac{13}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	
	6	$-\frac{7}{240}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{169}{120}$	$\frac{61}{30}$	0	$-\frac{61}{30}$	$\frac{169}{120}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{7}{240}$
4	2			1	-4	6	-4	1		
	4		$-\frac{1}{6}$	2	$-\frac{13}{2}$	$\frac{28}{3}$	$-\frac{13}{2}$	2	$-\frac{1}{6}$	
	6	$\frac{7}{240}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{91}{8}$	$-\frac{122}{15}$	$\frac{169}{60}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{7}{240}$





محاسبه مشتقات جزئی

تفاضل پیشرو

بسط سری تیلور

Order of derivative	Order of accuracy	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	∞	1								
1	1	-1	1							
	2	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$						
	3	$-\frac{11}{6}$	3	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$					
	4	$-\frac{25}{12}$	4	-3	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{4}$				
	5	$-\frac{137}{60}$	5	-5	$\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5}$			
	6	$-\frac{49}{20}$	6	$-\frac{15}{2}$	$\frac{20}{3}$	$-\frac{15}{4}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{6}$		
	7	$-\frac{363}{140}$	7	$-\frac{21}{2}$	$\frac{35}{3}$	$-\frac{35}{4}$	$\frac{21}{5}$	$-\frac{7}{6}$	$\frac{1}{7}$	
	8	$-\frac{761}{280}$	8	-14	$\frac{56}{3}$	$-\frac{35}{2}$	$\frac{56}{5}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{1}{8}$
2	1	1	-2	1						
	2	2	-5	4	-1					
	3	$\frac{35}{12}$	$-\frac{26}{3}$	$\frac{19}{2}$	$-\frac{14}{3}$	$\frac{11}{12}$				
	4	$\frac{15}{4}$	$-\frac{77}{6}$	$\frac{107}{6}$	-13	$\frac{61}{12}$	$-\frac{5}{6}$			
	5	$\frac{203}{45}$	$-\frac{87}{5}$	$\frac{117}{4}$	$-\frac{254}{9}$	$\frac{33}{2}$	$-\frac{27}{5}$	$\frac{137}{180}$		
	6	$\frac{469}{90}$	$-\frac{223}{10}$	$\frac{879}{20}$	$-\frac{949}{18}$	41	$-\frac{201}{10}$	$\frac{1019}{180}$	$-\frac{7}{10}$	
	7	$\frac{29531}{5040}$	$-\frac{962}{35}$	$\frac{621}{10}$	$-\frac{4006}{45}$	$\frac{691}{8}$	$-\frac{282}{5}$	$\frac{2143}{90}$	$-\frac{206}{35}$	$\frac{363}{560}$
3	1	-1	3	-3	1					
	2	$-\frac{5}{2}$	9	-12	7	$-\frac{3}{2}$				
	3	$-\frac{17}{4}$	$\frac{71}{4}$	$-\frac{59}{2}$	$\frac{49}{2}$	$-\frac{41}{4}$	$\frac{7}{4}$			
	4	$-\frac{49}{8}$	29	$-\frac{461}{8}$	62	$-\frac{307}{8}$	13	$-\frac{15}{8}$		
	5	$-\frac{967}{120}$	$\frac{638}{15}$	$-\frac{3929}{40}$	$\frac{389}{3}$	$-\frac{2545}{24}$	$\frac{268}{5}$	$-\frac{1849}{120}$	$\frac{29}{15}$	
	6	$-\frac{801}{80}$	$\frac{349}{6}$	$-\frac{18353}{120}$	$\frac{2391}{10}$	$-\frac{1457}{6}$	$\frac{4891}{30}$	$-\frac{561}{8}$	$\frac{527}{30}$	$-\frac{469}{240}$
4	1	1	-4	6	-4	1				
	2	3	-14	26	-24	11	-2			
	3	$\frac{35}{6}$	-31	$\frac{137}{2}$	$-\frac{242}{3}$	$\frac{107}{2}$	-19	$\frac{17}{6}$		
	4	$\frac{28}{3}$	$-\frac{111}{2}$	142	$-\frac{1219}{6}$	176	$-\frac{185}{2}$	$\frac{82}{3}$	$-\frac{7}{2}$	
	5	$\frac{1069}{80}$	$-\frac{1316}{15}$	$\frac{15289}{60}$	$-\frac{2144}{5}$	$\frac{10993}{24}$	$-\frac{4772}{15}$	$\frac{2803}{20}$	$-\frac{536}{15}$	$\frac{967}{240}$

تفاضل پسرو

مشتقات فرد: علامت مخالف
مشتقات زوج: علامت موافق

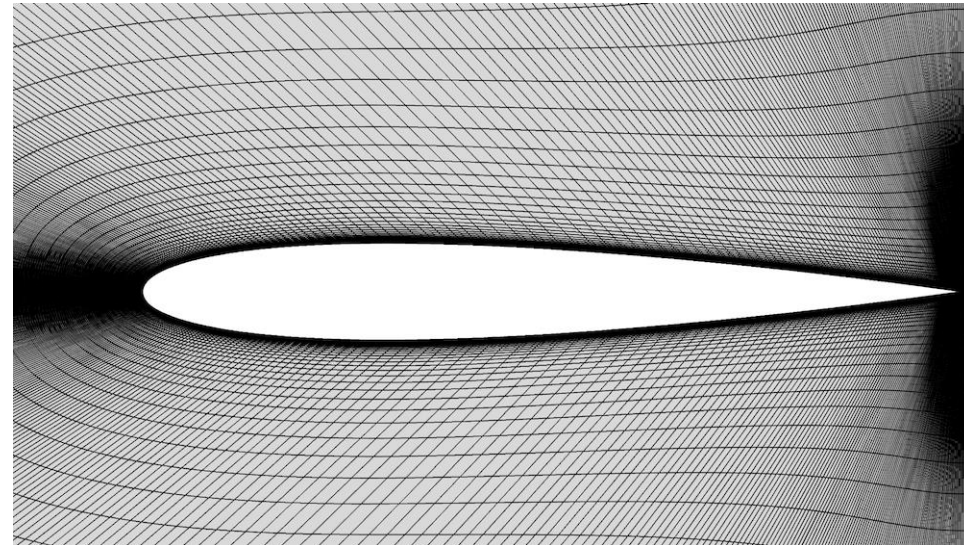
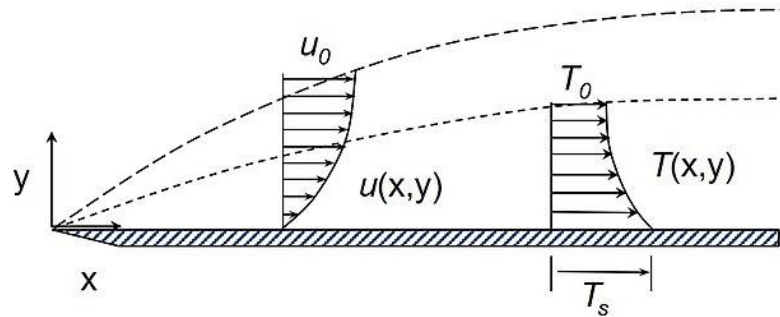
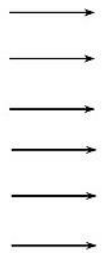




بسط سری تیلور

مش غیر یکنواخت

u_0, T_0





بسط سری تیلور

مشتق مرتبه اول

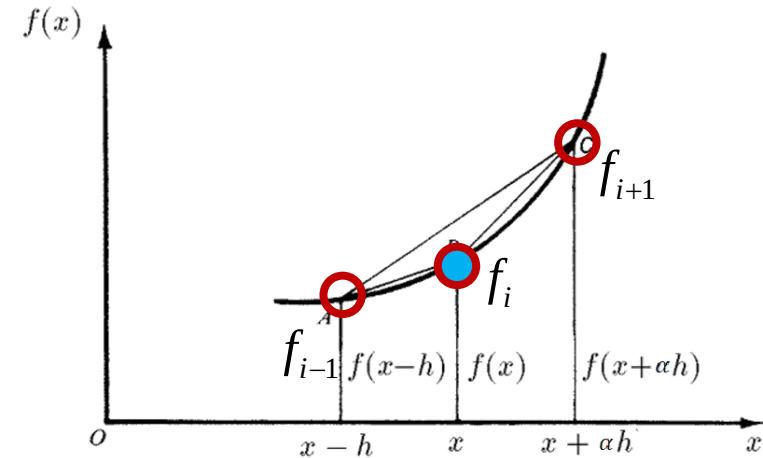
$$x_{i-1} = x - h: \quad f_{i-1} = f_i - f'h + \frac{f''}{2!}h^2 - \frac{f'''}{3!}h^3 \dots$$

$$x_{i+1} = x + \alpha h: \quad f_{i+1} = f_i + f'(\alpha h) + \frac{f''}{2!}(\alpha h)^2 + \frac{f'''}{3!}(\alpha h)^3 \dots$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_{i-1} = f'(\alpha + 1)h + f''(\alpha^2 - 1)\frac{h^2}{2!} + f'''(\alpha^3 + 1)\frac{h^3}{3!} \dots$$

$$\Rightarrow f'(\alpha + 1)h = f_{i+1} - f_{i-1} - f''(\alpha^2 - 1)\frac{h^2}{2!} - f'''(\alpha^3 + 1)\frac{h^3}{3!} \dots$$

$$\Rightarrow f' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{(\alpha + 1)h} - f''(\alpha - 1)\frac{h}{2!} - \dots$$



$$f' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{(\alpha + 1)h} + O(h)$$

$$\alpha \neq 1$$





بسط سری تیلور

مشتق مرتبه اول با دقت درجه ۲

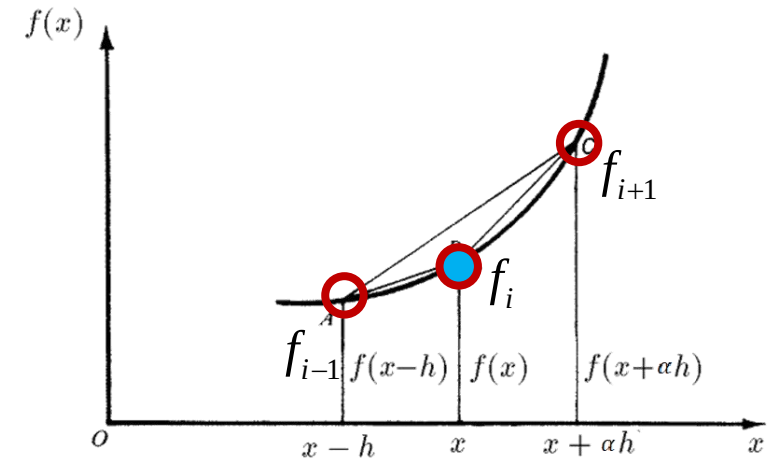
$$x_{i-1} = x - h: \quad f_{i-1} = f_i - f'h + \frac{f''}{2!}h^2 - \frac{f'''}{3!}h^3 \dots$$

$$x_{i+1} = x + \alpha h: \quad f_{i+1} = f_i + f'(\alpha h) + \frac{f''}{2!}(\alpha h)^2 + \frac{f'''}{3!}(\alpha h)^3 \dots$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - \alpha^2 f_{i-1} = (1 - \alpha^2) f_i + f'(\alpha + \alpha^2)h + f'''(\alpha^3 + \alpha^2) \frac{h^3}{3!} \dots$$

$$\Rightarrow f'(\alpha + \alpha^2)h = f_{i+1} - \alpha^2 f_{i-1} - (1 - \alpha^2) f_i - f'''(\alpha^3 + \alpha^2) \frac{h^3}{3!} \dots$$

$$\Rightarrow f' = \frac{f_{i+1} - \alpha^2 f_{i-1} - (1 - \alpha^2) f_i}{(\alpha + \alpha^2)h} + f''' \frac{(\alpha^3 + \alpha^2) h^2}{(\alpha + \alpha^2) 3!} \dots$$



$$f' = \frac{-\alpha^2 f_{i-1} + (\alpha^2 - 1) f_i + f_{i+1}}{\alpha(\alpha + 1)h} + O(h^2)$$





بسط سری تیلور

مشتق اول مش غیر یکنواخت با استفاده از بسط تیلور

$$f'_i = \frac{af_{i-1} + bf_i + cf_{i+1}}{h} + T.E.$$

$$f_{i-1} = f_i - f'_i h + \frac{f''_i}{2!} h^2 - \frac{f'''_i}{3!} h^3 \dots$$

$$f_i = f_i$$

$$f_{i+1} = f_i + f'_i \alpha h + \frac{f''_i}{2!} \alpha^2 h^2 + \frac{f'''_i}{3!} \alpha^3 h^3 \dots$$

$$\frac{a}{h} f_{i-1} = \frac{a}{h} f_i - \frac{a}{h} f'_i h + \frac{a}{h} \frac{f''_i}{2!} h^2 - \frac{a}{h} \frac{f'''_i}{3!} h^3 \dots$$

$$\frac{b}{h} f_i = \frac{b}{h} f_i$$

$$\frac{c}{h} f_{i+1} = \frac{c}{h} f_i + \frac{c}{h} f'_i \alpha h + \frac{c}{h} \frac{f''_i}{2!} \alpha^2 h^2 + \frac{c}{h} \frac{f'''_i}{3!} \alpha^3 h^3 \dots$$





بسط سری تیلور

$$\frac{af_{i-1} + bf_i + cf_{i+1}}{h} = f_i \left(\frac{a+b+c}{h} \right) + f'_i \left(\frac{-a+c\alpha}{h} \right) h + f''_i \left(\frac{a+c\alpha^2}{h} \right) \frac{h^2}{2} + f'''_i \left(\frac{a-c\alpha^3}{h} \right) \frac{h^3}{6} + \dots$$

$$f'_i - T.E. = f_i \left(\frac{a+b+c}{h} \right) + f'_i \left(\frac{-a+c\alpha}{h} \right) h + f''_i \left(\frac{a+c\alpha^2}{h} \right) \frac{h^2}{2} + f'''_i \left(\frac{a-c\alpha^3}{h} \right) \frac{h^3}{6} + \dots$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c\alpha = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &b = 0 \\ &c = \frac{1}{1 + \alpha} \\ &a = \frac{-1}{1 + \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c\alpha = 1 \\ a + c\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow c\alpha(1 + \alpha) = 1 \rightarrow c = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)}$$

$$\rightarrow a = \frac{-\alpha^2}{\alpha(1 + \alpha)} \quad \rightarrow b = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha(1 + \alpha)}$$

$$f' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{(\alpha + 1)h} + O(h)$$

$$f' = \frac{-\alpha^2 f_{i-1} + (\alpha^2 - 1) f_i + f_{i+1}}{\alpha(\alpha + 1)h} + O(h^2)$$





روش چندجمله‌ای

اساس روش: برازش یک چندجمله‌ای به نقاط مورد نظر

یک + مرتبه چندجمله‌ای = تعداد نقاط مورد نیاز

مرتبه چندجمله‌ای = حداکثر مرتبه مشتق قابل محاسبه

نقطه ضعف: عدم امکان اظهار نظر در مورد مرتبه خطا

نقطه قوت: بدست آمدن تمامی مشتقات تا مرتبه چندجمله‌ای





محاسبه مشتقات جزئی

روش چندجمله‌ای

مشتق دوم مرکزی با ۳ نقطه

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

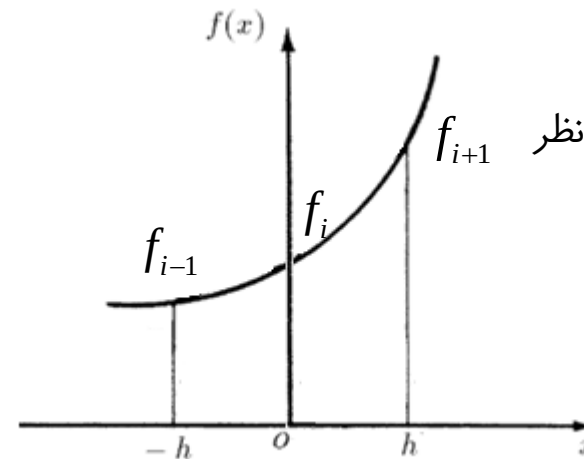
$$@x = 0; f(x) = f_i$$

$$@x = -h; f(x) = f_{i-1}$$

$$@x = h; f(x) = f_{i+1}$$

$$\begin{cases} c = f_i \\ ah^2 - bh + c = f_{i-1} \\ ah^2 + bh + c = f_{i+1} \end{cases}$$

$$f_{i-1} \quad f_i \quad f_{i+1}$$



قرار دادن محور مختصات روی نقطه مورد نظر





روش چندجمله‌ای

مشتق دوم مرکزی با ۳ نقطه

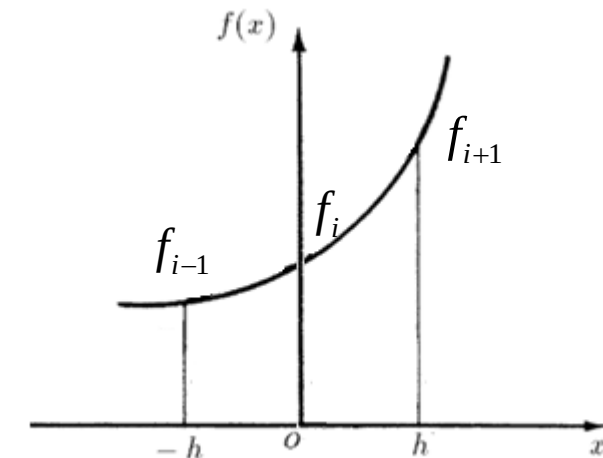
$$\rightarrow \begin{cases} ah^2 - bh = f_{i-1} - f_i \\ ah^2 + bh = f_{i+1} - f_i \end{cases} \rightarrow 2ah^2 = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} \rightarrow a = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{2h^2}$$

$$\rightarrow 2bh = f_{i+1} - f_{i-1} \rightarrow b = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'_i = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = b \rightarrow f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$f''_i = \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=0} = 2a \rightarrow f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$





روش چندجمله‌ای

مشتق مرتبه ۳ با مقادیر نقاط $i-2, i-1, i+1, i+2$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$@x = -2h; f(x) = f_{i-2}$$

$$@x = -h; f(x) = f_{i-1}$$

$$@x = h; f(x) = f_{i+1}$$

$$@x = 2h; f(x) = f_{i+2}$$

$$\begin{cases} -8ah^3 + 4bh^2 - 2ch + d = f_{i-2} \\ -ah^3 + bh^2 - ch + d = f_{i-1} \\ ah^3 + bh^2 + ch + d = f_{i+1} \\ 8ah^3 + 4bh^2 + 2ch + d = f_{i+2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 16ah^3 + 4ch = f_{i+2} - f_{i-2} \\ 2ah^3 + 2ch = f_{i+1} - f_{i-1} \end{cases}$$

$$\rightarrow 12ah^3 = f_{i+2} - f_{i-2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1}$$

$$\rightarrow a = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{12h^3}$$

$$\rightarrow -12ch = f_{i+2} - f_{i-2} - 8f_{i+1} + 8f_{i-1}$$

$$\rightarrow c = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12h}$$





روش چندجمله‌ای

مشتق مرتبه ۳ با مقادیر نقاط $i-2, i-1, i+1, i+2$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8bh^2 + 2d = f_{i-2} + f_{i+2} \\ 2bh^2 + 2d = f_{i-1} + f_{i+1} \end{cases}$$

$$\rightarrow 6bh^2 = f_{i-2} + f_{i+2} - f_{i-1} - f_{i+1}$$

$$\rightarrow b = \frac{f_{i-2} - f_{i-1} - f_{i+1} + f_{i+2}}{6h^2}$$

$$\rightarrow -6d = f_{i-2} + f_{i+2} - 8f_{i-1} - 8f_{i+1}$$

$$\rightarrow d = \frac{-f_{i-2} + 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{6}$$

$$f_i''' = 6a = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2h^3}$$

$$f_i'' = 2b = \frac{f_{i-2} - f_{i-1} - f_{i+1} + f_{i+2}}{3h^2} + O(h^2)$$





روش چندجمله‌ای

مشتق مرتبه ۳ با مقادیر نقاط $i-2, i-1, i+1, i+2$

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$@x = -2h; f(x) = f_{i-2}$$

$$@x = -h; f(x) = f_{i-1}$$

$$@x = 0; f(x) = f_i$$

$$@x = h; f(x) = f_{i+1}$$

$$@x = 2h; f(x) = f_{i+2}$$

$$\begin{cases} 16ah^4 - 8bh^3 + 4ch^2 - 2dh + e = f_{i-2} \\ ah^4 - bh^3 + ch^2 - dh + e = f_{i-1} \\ e = f_i \\ ah^4 + bh^3 + ch^2 + dh + e = f_{i+1} \\ 16ah^4 + 8bh^3 + 4ch^2 + 2dh + e = f_{i+2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 16h^4 & -8h^3 & 4h^2 & -h & 1 \\ h^4 & -h^3 & h^2 & -h & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^4 & h^3 & h^2 & h & 1 \\ 16h^4 & 8h^3 & h^2 & h & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{i-2} \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \end{bmatrix}$$





روش چندجمله‌ای

مشتق مرتبه ۳ با مقادیر نقاط $i-2, i-1, i+1, i+2$

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$@x = -2h; f(x) = f_{i-2}$$

$$@x = -h; f(x) = f_{i-1}$$

$$@x = 0; f(x) = f_i$$

$$@x = h; f(x) = f_{i+1}$$

$$@x = 2h; f(x) = f_{i+2}$$

$$b = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{12h^3}$$

$$f_i''' = 6b = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2h^3}$$

$$c = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{24h^2}$$

$$f_i'' = 2c = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{12h^2} + O(h^4)$$





روش چندجمله‌ای

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$i, i+1, i+2, i+3$$

مشتق مرتبه ۲ با مقادیر نقاط

$$@x = 0; f(x) = f_i$$

$$@x = h; f(x) = f_{i+1}$$

$$@x = 2h; f(x) = f_{i+2}$$

$$@x = 3h; f(x) = f_{i+3}$$

$$\begin{cases} d = f_i \\ ah^3 + bh^2 + ch + d = f_{i+1} \\ 8ah^3 + 4bh^2 + ch + d = f_{i+2} \\ 27ah^3 + 9bh^2 + ch + d = f_{i+3} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ h^3 & h^2 & h & 1 \\ 8h^3 & 4h^2 & 2h & 1 \\ 27h^3 & 9h^2 & 3h & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \\ f_{i+2} \\ f_{i+3} \end{bmatrix}$$





روش چندجمله‌ای

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$i, i+1, i+2, i+3$$

مشتق مرتبه ۲ با مقادیر نقاط

$$@x = 0; f(x) = f_i$$

$$@x = h; f(x) = f_{i+1}$$

$$@x = 2h; f(x) = f_{i+2}$$

$$@x = 3h; f(x) = f_{i+3}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-f_i + 3f_{i+1} - 3f_{i+2} + f_{i+3}}{6h^3} \\ \frac{f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{2h^2} \\ \frac{-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}}{6h} \\ f_i \end{bmatrix}_i$$

$$f_i'' = 2b = \frac{f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}}{h^2}$$





روش چندجمله‌ای

مشتق شبکه غیر یکنواخت با استفاده از سه نقطه

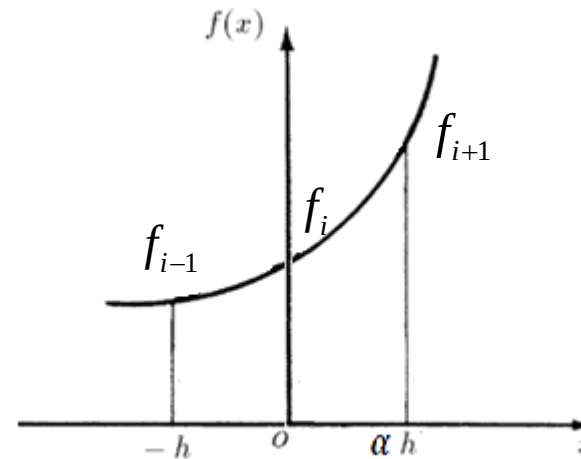
$$f_{i-1} \quad f_i \quad f_{i+1}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$@x = 0; f(x) = f_i$$

$$@x = -h; f(x) = f_{i-1}$$

$$@x = \alpha h; f(x) = f_{i+1}$$



$$\begin{cases} c = f_i \\ ah^2 - bh + c = f_{i-1} \\ a\alpha^2 h^2 + b\alpha h + c = f_{i+1} \end{cases}$$





روش چندجمله‌ای

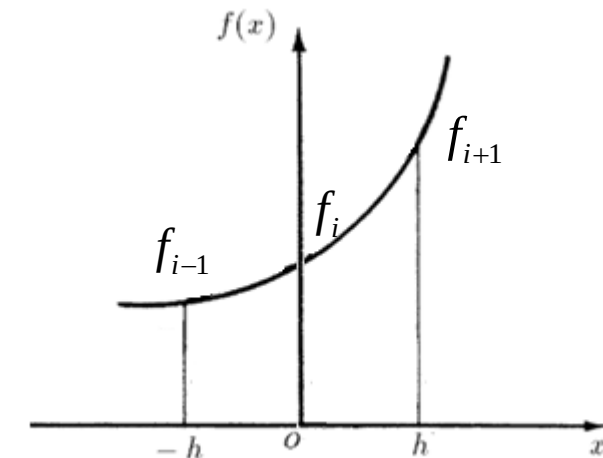
$$\rightarrow \begin{cases} ah^2 - bh = f_{i-1} - f_i \\ a\alpha^2 h^2 + b\alpha h = f_{i+1} - f_i \end{cases} \rightarrow ah^2(\alpha^2 + \alpha) = f_{i+1} - f_i(1 + \alpha) + \alpha f_{i-1} \rightarrow a = \frac{f_{i+1} - f_i(1 + \alpha) + \alpha f_{i-1}}{\alpha(\alpha + 1)h^2}$$

$$\rightarrow bh(\alpha + \alpha^2) = f_{i+1} - f_i(1 - \alpha^2) - \alpha^2 f_{i-1} \rightarrow b = \frac{f_{i+1} - f_i(1 - \alpha^2) - \alpha^2 f_{i-1}}{\alpha(\alpha + 1)h}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'_i = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = b \rightarrow f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i(1 - \alpha^2) - \alpha^2 f_{i-1}}{\alpha(\alpha + 1)h}$$

$$f''_i = \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=0} = 2a \rightarrow f''_i = \frac{2f_{i+1} - 2f_i(1 + \alpha) + 2\alpha f_{i-1}}{\alpha(\alpha + 1)h^2}$$





روش چندجمله‌ای

مقایسه با بسط تیلور

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{d^2f}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{d^3f}{dx^3}\bigg|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots$$

$$x_0 = 0; \quad f(x) = f_i + f'_i x + \frac{f''_i}{2!} x^2 + \frac{f'''_i}{3!} x^3 + \dots$$

$$f(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$$

$$\begin{cases} d = f_i \\ c = f'_i \\ b = \frac{f''_i}{2!} \\ a = \frac{f'''_i}{3!} \end{cases}$$



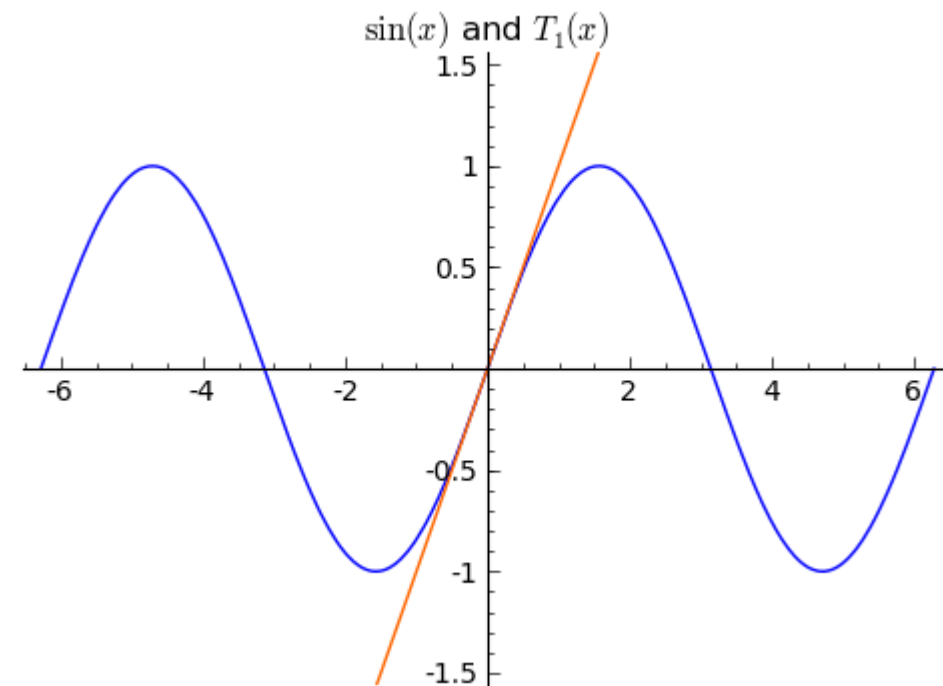
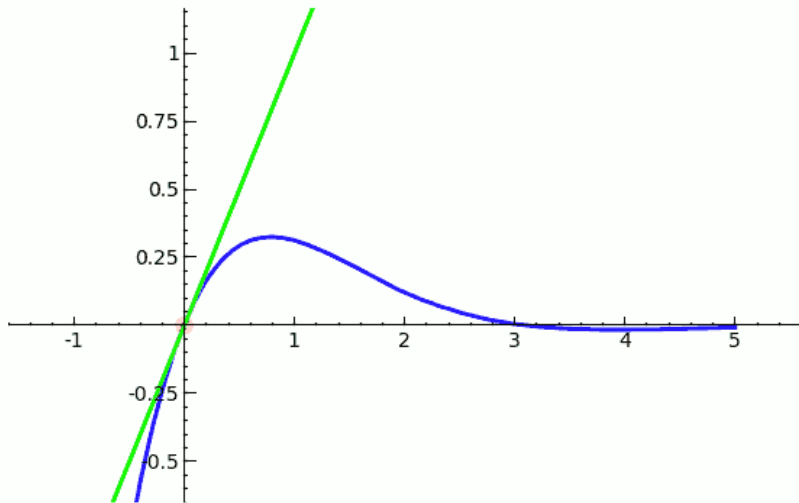


روش چندجمله‌ای

order

$$f(x) = e^{-x} \sin(x)$$

$$\hat{f}(x; 0) = x + \mathcal{O}(x^2)$$





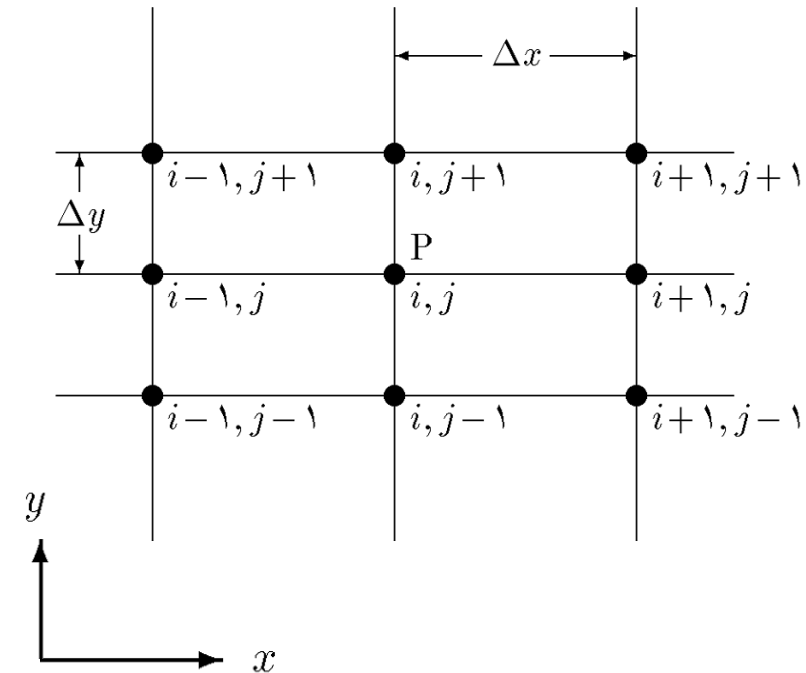
تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial t} \quad \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{2!} +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots$$



در اعمال روش تفاضل محدود در میدان دو بعدی (و سه بعدی) ابتدا در راستای y ثابت و سپس x ثابت حرکت می‌کنیم





محاسبه مشتقات جزئی

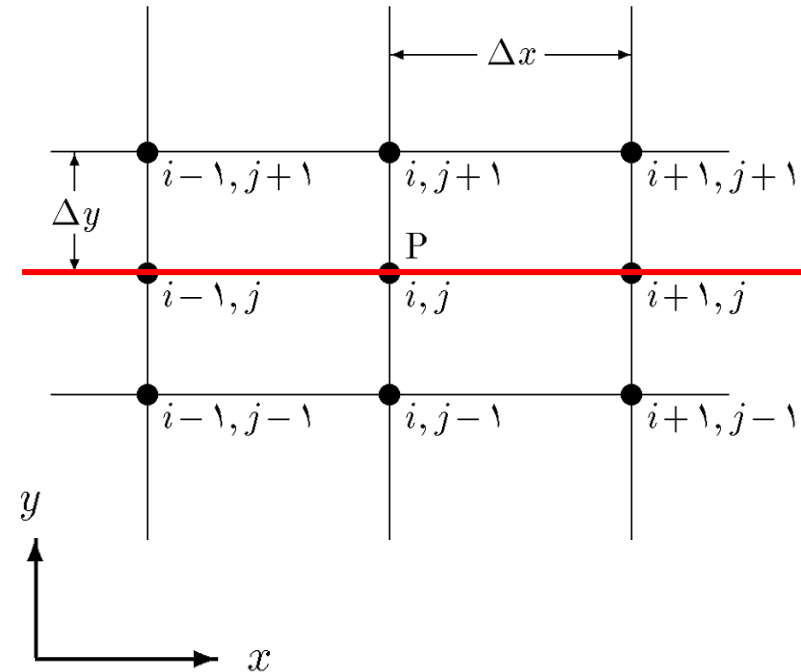
تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

بدست آوردن مشتقات جزئی نسبت به x

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots$$





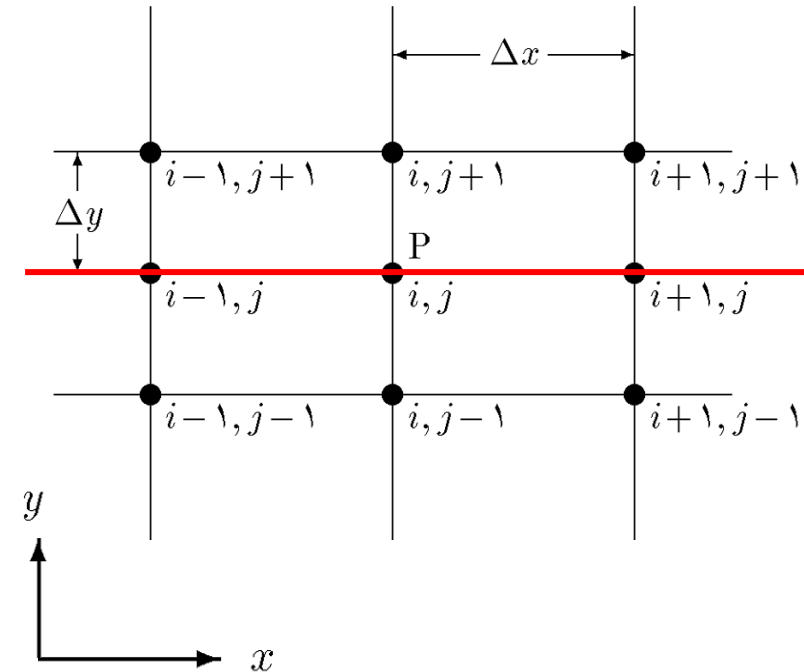
محاسبه مشتقات جزئی

تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

بدست آوردن مشتقات جزئی نسبت به x

$$f(x, y) = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} (x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$



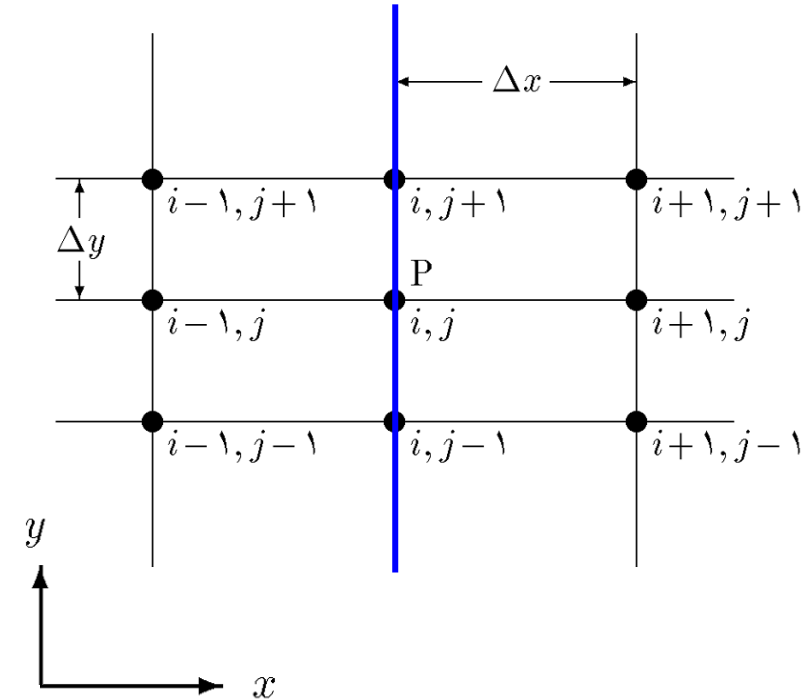


محاسبه مشتقات جزئی

تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

بدست آوردن مشتقات جزئی نسبت به y

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{2!} + \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$





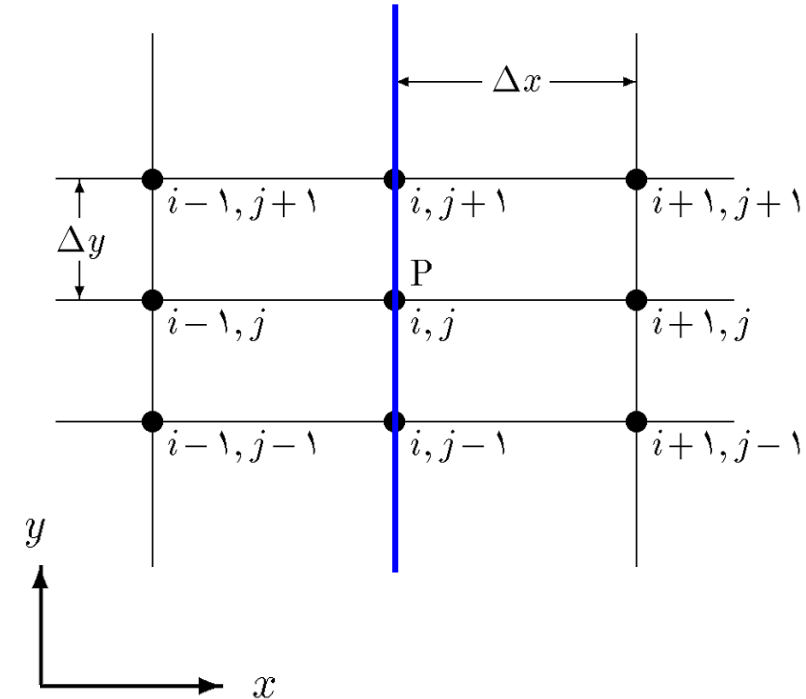
محاسبه مشتقات جزئی

تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

بدست آوردن مشتقات جزئی نسبت به y

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x_0, y_0} \frac{(y - y_0)^2}{2!} + \dots$$

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta y)^2}{2!} + \dots$$





محاسبه مشتقات جزئی

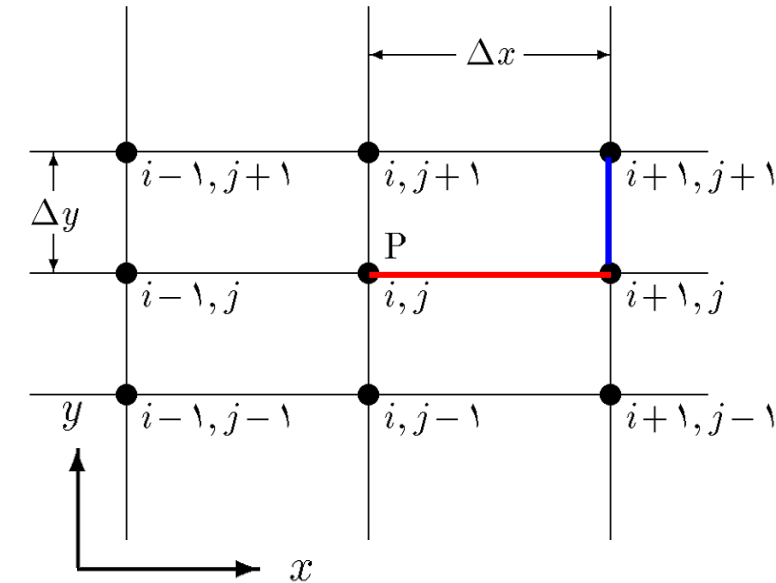
تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta y)^2}{2!} + \dots$$

$$f_{i+1,j+1} = f_{i+1,j} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i+1,j} \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i+1,j} \frac{(\Delta y)^2}{2!} + \dots$$

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i+1,j} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x + \dots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i+1,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \dots$$



$$f_{i+1,j+1} = f_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i,j} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{i,j} \frac{(\Delta y)^2}{2!} + \dots$$

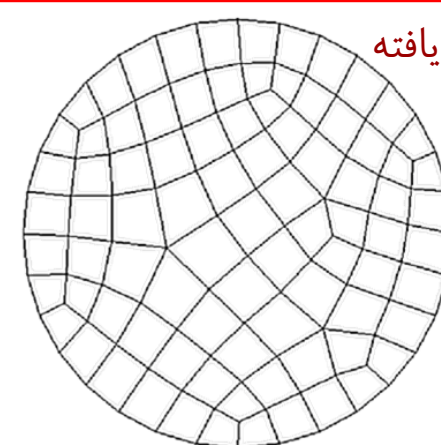
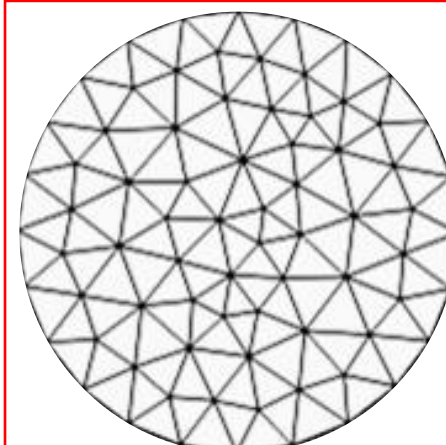
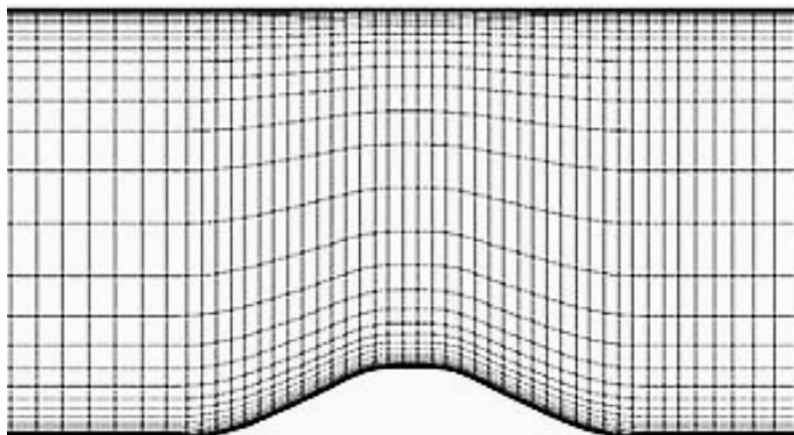
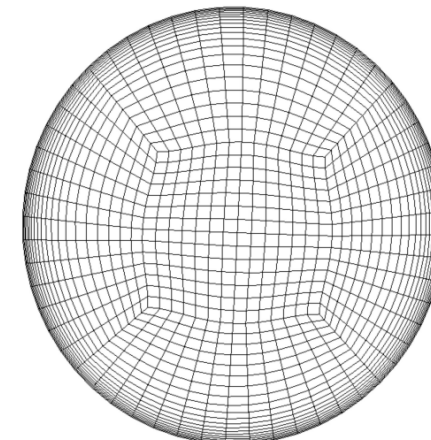
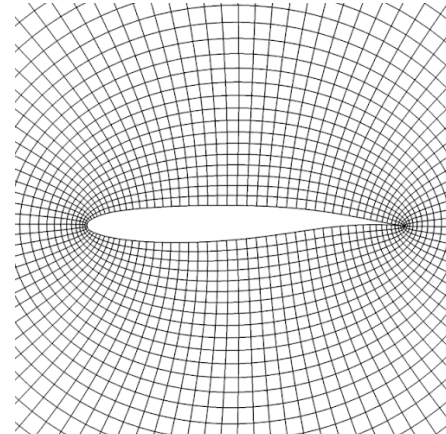
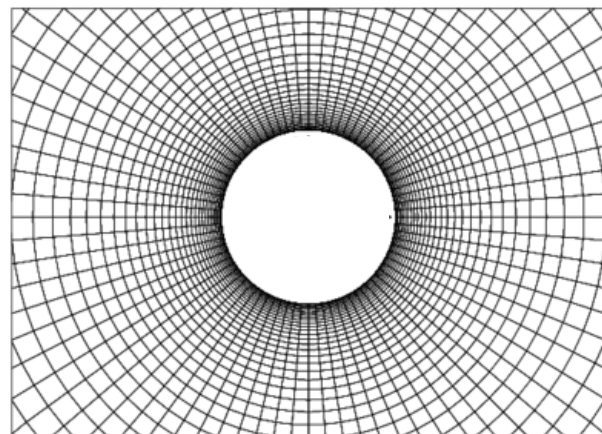
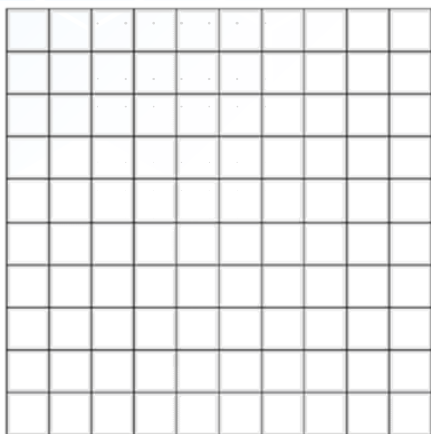




محاسبه مشتقات جزئی

تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

مش ساختاریافته: عدم نیاز به ذخیره همسایه ها $\leftrightarrow$ قابلیت ثابت فرض کردن یک متغیر در هنگام حرکت در راستای شبکه



غیر ساختاریافته

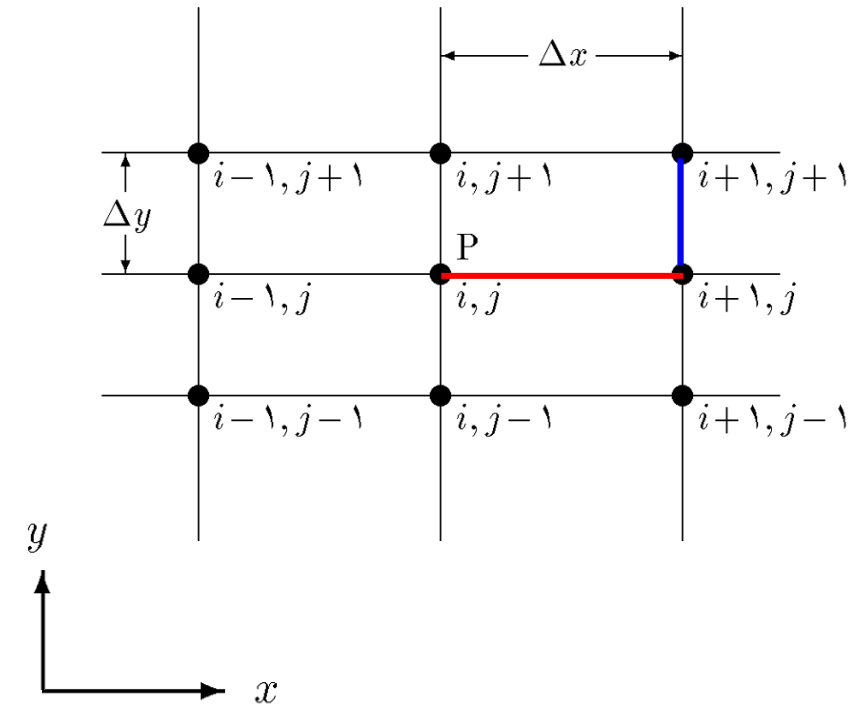




تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{i,j+1}}{2\Delta y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1}}{2\Delta x} \right) - \frac{1}{2\Delta y} \left(\frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \right) \\ &= \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \end{aligned}$$

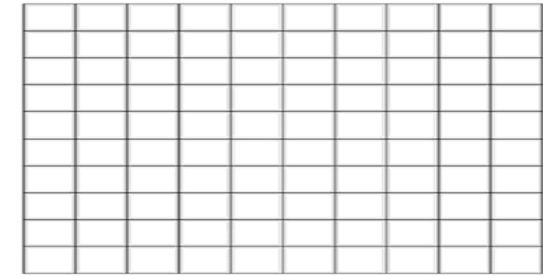




محاسبه مشتقات جزئی

تفاضل محدود در کاربرد دو بعدی و سه بعدی

معادله انتقال حرارت دو بعدی گذرا



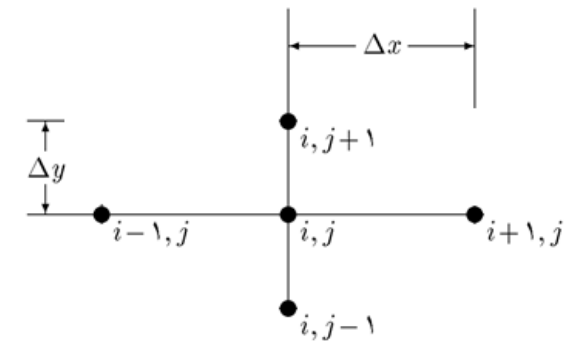
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left[\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right]$$

گسسته‌سازی مکانی

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right]$$

گسسته‌سازی زمانی



ریاضیات حجم محدود



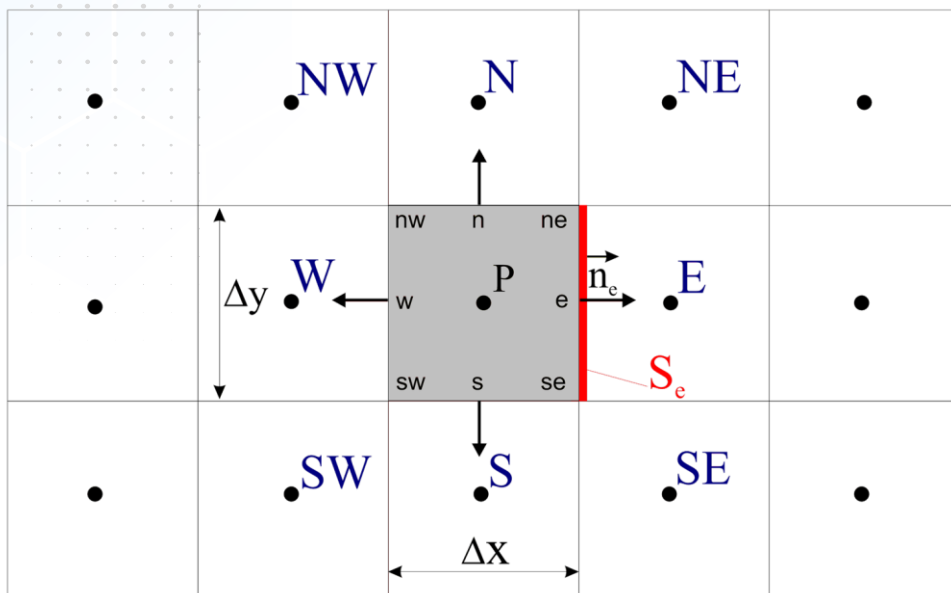
مقدمه

- گسسته سازی میدان حل به حجم‌های کوچک بجای نقاط.
- امکان پیاده‌سازی بر روش شبکه‌های غیر ساختار یافته
- پایه اکثر حلگرهای تجاری
- هر حجم کنترل یک مجهول دارد که میانگین تابع هدف در آن حجم می‌باشد و گسسته‌سازی برای یافتن این پارامتر انجام می‌شود هرچند امکان محاسبه مقادیر نقطه‌ای وجود دارد.
- اساس این روش استفاده از شکل انتگرالی معادلات حاکم و قضیه گوس دیورژانس است
- گام‌های مورد نیاز:

✓ نوشتن معادلات به شکل پایستار

✓ میانگین‌گیری روی حجم کنترل

✓ گسسته‌سازی و تقریب مقادیر مرزها بر حسب مقادیر میانگین





حل معادله دیفرانسیل معمولی

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

دامنه حل و شرایط مرزی

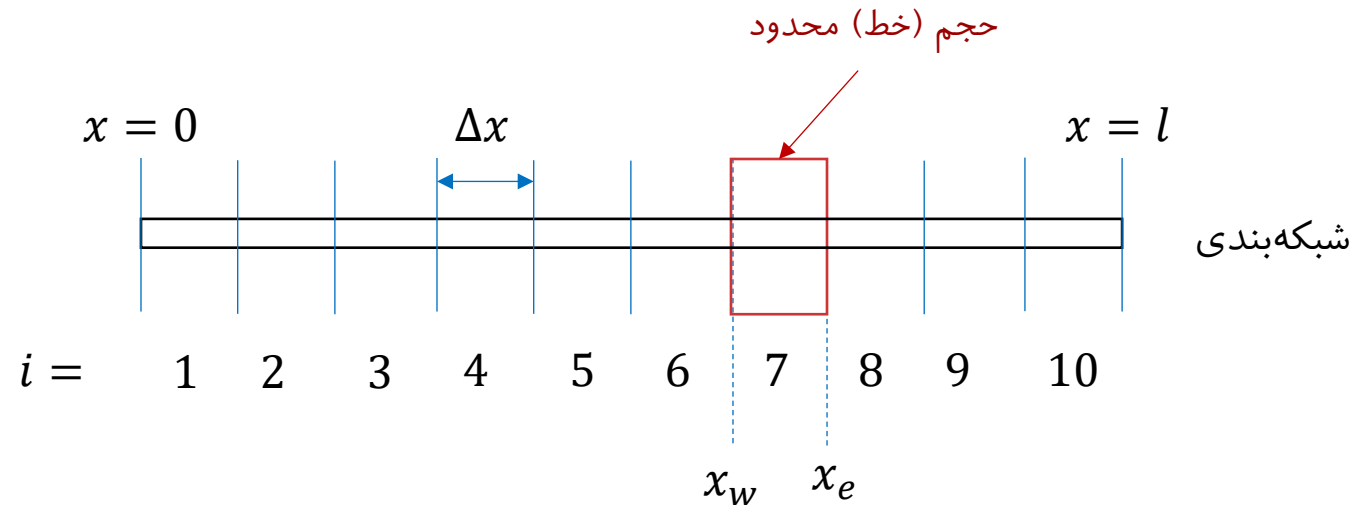
$$0 \leq x \leq l$$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad \phi(l) = \phi_l$$

$$N = 10$$

$$\Delta x = \frac{l}{N}$$

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{x_e - x_w} \int_{x_w}^{x_e} \phi(x) dx$$



هدف: گسسته‌سازی معادله بر حسب مقادیر
متوسط

مجهولات: $\bar{\phi}_i |_{i=1, \dots, 10}$ میدان پاسخ: $\bar{\phi}_i |_{i=1, \dots, 10}$

معادلات: نوشتن معادله حاکم در این ۱۰ حجم محدود (پاره خط)

شرایط مرزی:
 $\phi(0) = \phi_0$
 $\phi(l) = \phi_l$

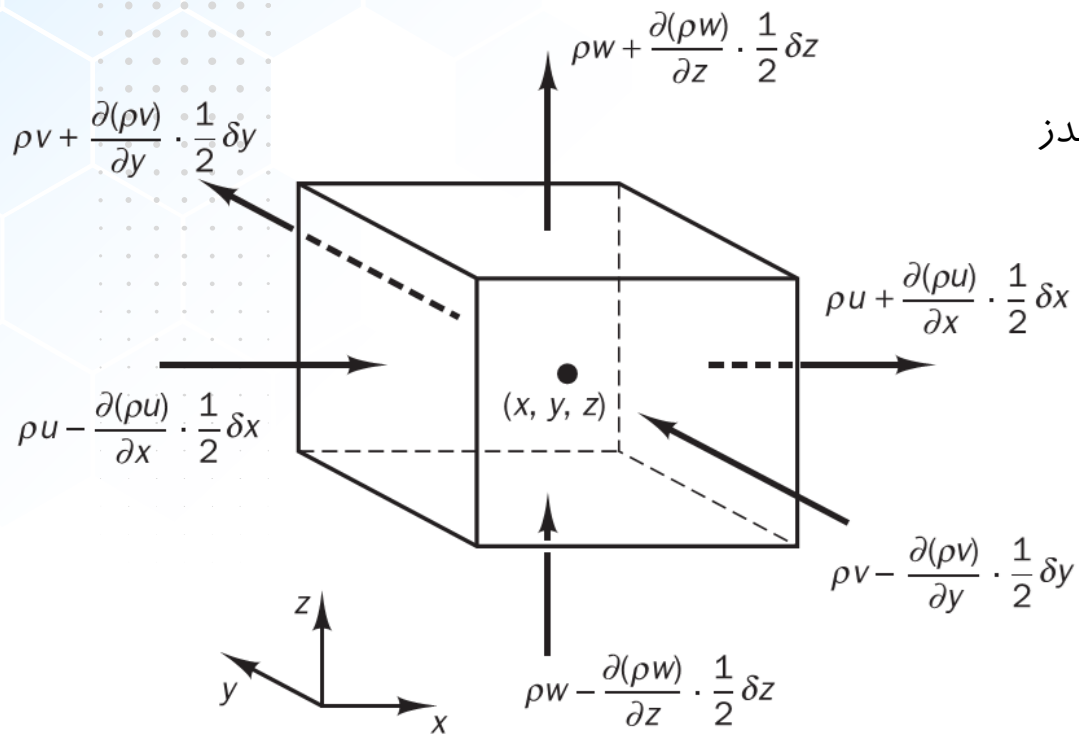




صورت پایستار معادلات

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

معادله انتقال رینولدز



نرخ افزایش جرم = نرخ خالص جریان جرم
در المان سیال ورودی به المان سیال

صورت پایستار معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

صورت پایستار

صورتی از معادله که مستقیماً از اعمال قوانین بقا به معادلات بدست می‌آید





صورت پایستار معادلات

صورت غیر پایستار معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \vec{V}) + \vec{V} \cdot \nabla \rho = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

شار (Flux)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = S$$

صورت پایستار

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = S$$

عبارت‌های مشتقات مکانی مشخص و جدا باشند

$$N.S. \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \frac{P}{\rho} - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

انواع شار:

✓ شار جابجایی (Convective) $F = func(\phi)$ ✓ شار پخشی (Diffusive) $F = func\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$ 



نوشتن معادله به صورت پایستار

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

دامنه حل و شرایط مرزی

$$0 \leq x \leq l$$

$$c = \text{const.}$$

$$\phi(0) = \phi_0 \quad \phi(l) = \phi_l$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d(c\phi)}{dx} = \cos \pi x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) = \cos \pi x$$

$$c = \text{func}(x)$$

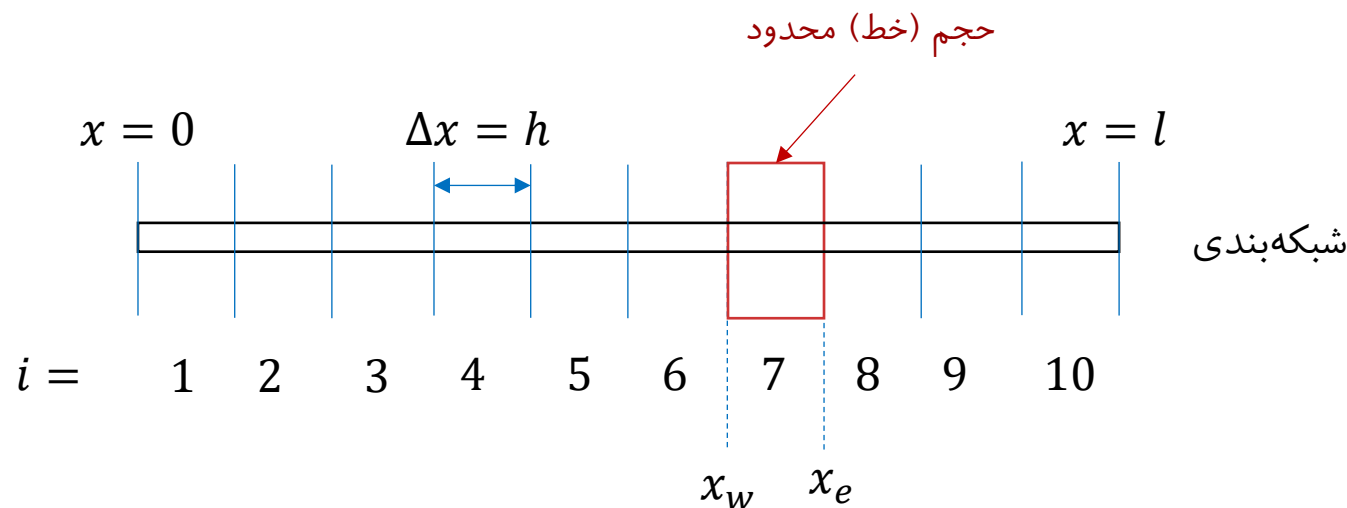
$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d(c\phi)}{dx} - \phi \frac{dc}{dx} = \cos \pi x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) = \cos \pi x + \phi \frac{dc}{dx}$$

$$c = \phi$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{d(\phi^2/2)}{dx} = \cos \pi x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{\phi^2}{2} \right) = \cos \pi x$$



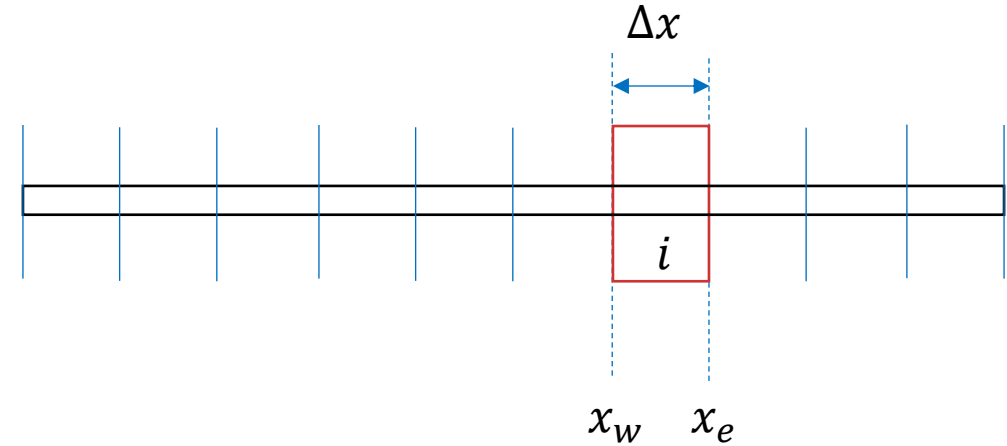


متوسط‌گیری از معادله پایستار روی حجم کنترل

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) = \cos \pi x \quad c = \text{const.}$$



$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) \Big|_i = \overline{\cos \pi x} \Big|_i \quad \bar{f}_i = \frac{1}{x_e - x_w} \int_{x_w}^{x_e} f(x) dx$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \cos \pi x dx$$

$$\frac{1}{\Delta x} \left\{ \left[\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right]_e - \left[\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right]_w \right\} = \frac{1}{\pi \Delta x} \{ [\sin \pi x]_e - [\sin \pi x]_w \}$$





متوسط‌گیری از معادله پایستار روی حجم کنترل

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

$$\frac{dF}{dx} = S$$

$$F = \frac{d\phi}{dx} + c\phi$$

$$\left. \frac{dF}{dx} \right|_i = \bar{S}_i$$

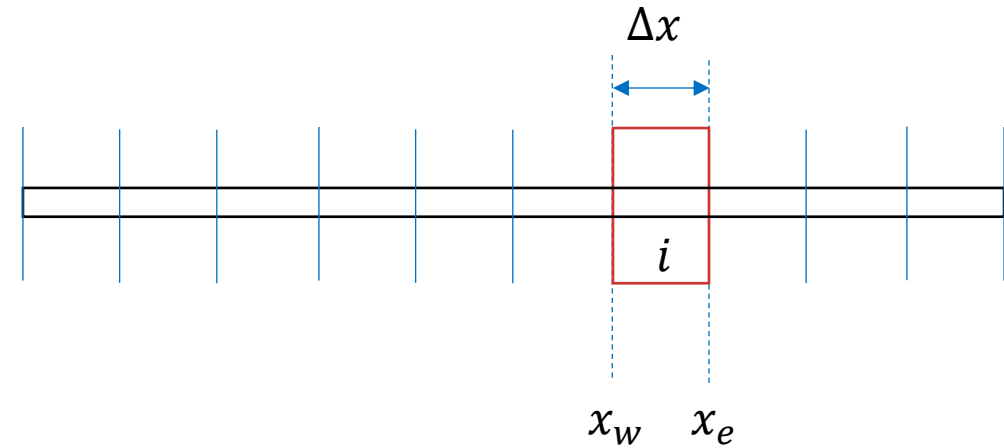
$$S = \cos \pi x$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \frac{dF}{dx} dx = \bar{S}_i$$

$$\frac{1}{\Delta x} (F_e - F_w) = \bar{S}_i$$

$$F_e = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e + c\phi_e$$

$$F_w = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w + c\phi_w$$





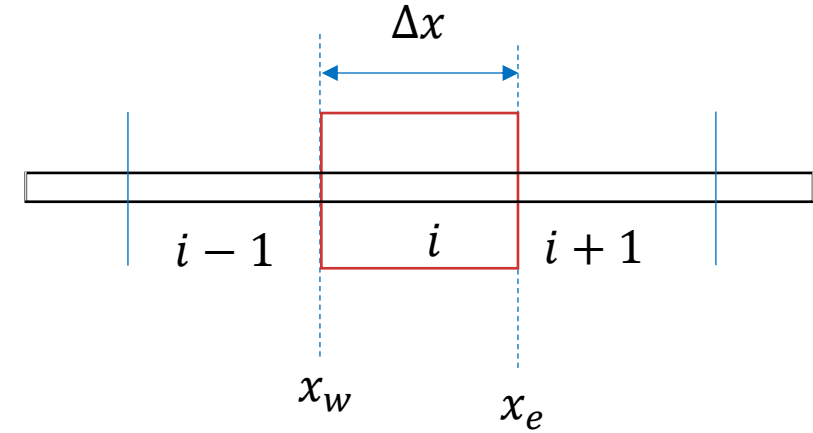
تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

$$F_e = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e + c\phi_e$$

$$F_w = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w + c\phi_w$$



$$F_e = func(\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_{i+1})$$

تقریب اطلاعات هر مرز با استفاده از دو حجم مشترک در آن مرز

$$F_w = func(\bar{\phi}_{i-1}, \bar{\phi}_i)$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{a\bar{\phi}_i + b\bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x}$$

$$\phi_e = c\bar{\phi}_i + d\bar{\phi}_{i+1}$$





تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

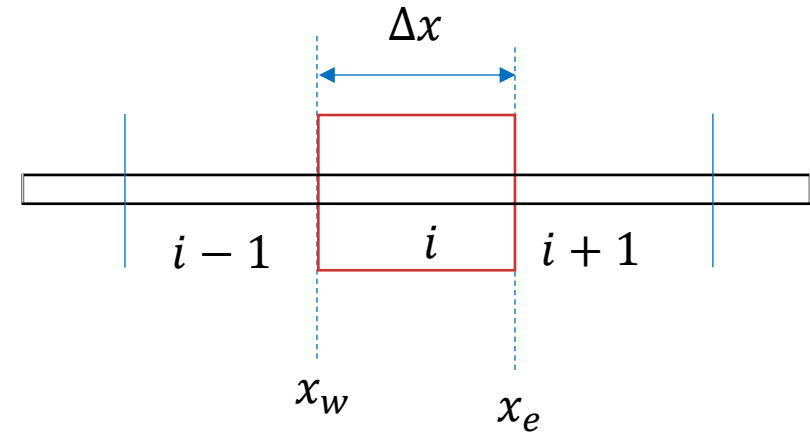
معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{a\bar{\phi}_i + b\bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x}$$

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \phi(x) dx$$

$$\phi(x) = \phi_e + \phi'_e(x - x_e) + \frac{1}{2!} \phi''_e(x - x_e)^2 + \frac{1}{3!} \phi'''_e(x - x_e)^3 + \dots$$

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \left(\phi_e + \phi'_e(x - x_e) + \frac{1}{2!} \phi''_e(x - x_e)^2 + \frac{1}{3!} \phi'''_e(x - x_e)^3 + \dots \right) dx$$



$$\xi = x - x_e$$

$$\xi_e = 0$$

$$\phi_e(x) = \phi_0(\xi)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d\phi}{dx}$$

$$d\xi = dx$$

$$\xi_w = x_w - x_e = -\Delta x$$

$$\phi'_e(x) = \phi'_0(\xi)$$





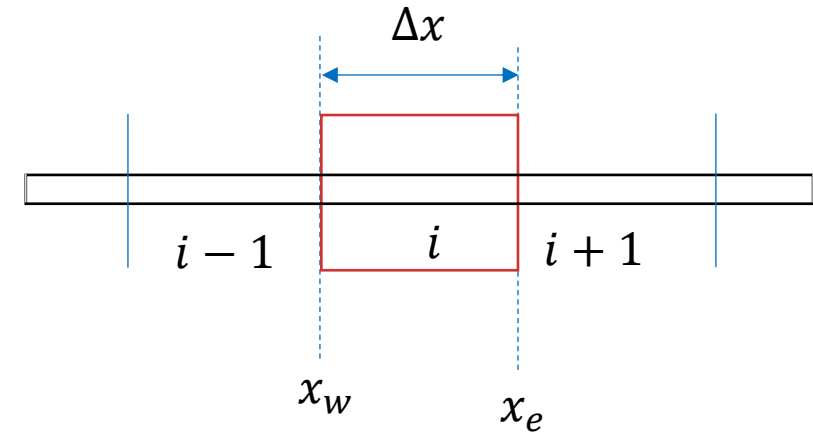
تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{a\bar{\phi}_i + b\bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x}$$

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x}^0 \left(\phi_e + \phi'_e \xi + \frac{1}{2!} \phi''_e \xi^2 + \frac{1}{3!} \phi'''_e \xi^3 + \dots \right) d\xi$$

$$\bar{\phi}_i = \phi_e - \frac{1}{2} \phi'_e \Delta x + \frac{1}{3!} \phi''_e \Delta x^2 - \frac{1}{4!} \phi'''_e \Delta x^3 + \dots$$





تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$

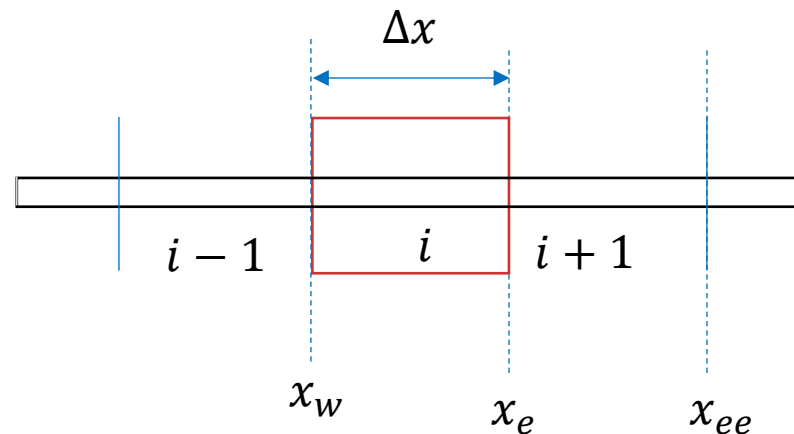
$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{a\bar{\phi}_i + b\bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x}$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_e}^{x_{ee}} \phi(x) dx$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_e}^{x_{ee}} \left(\phi_e + \phi'_e(x - x_e) + \frac{1}{2!} \phi''_e(x - x_e)^2 + \frac{1}{3!} \phi'''_e(x - x_e)^3 + \dots \right) dx$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \left(\phi_e + \phi'_e \xi + \frac{1}{2!} \phi''_e \xi^2 + \frac{1}{3!} \phi'''_e \xi^3 + \dots \right) d\xi$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = \phi_e + \frac{1}{2} \phi'_e \Delta x + \frac{1}{3!} \phi''_e \Delta x^2 + \frac{1}{4!} \phi'''_e \Delta x^3 + \dots$$





تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$

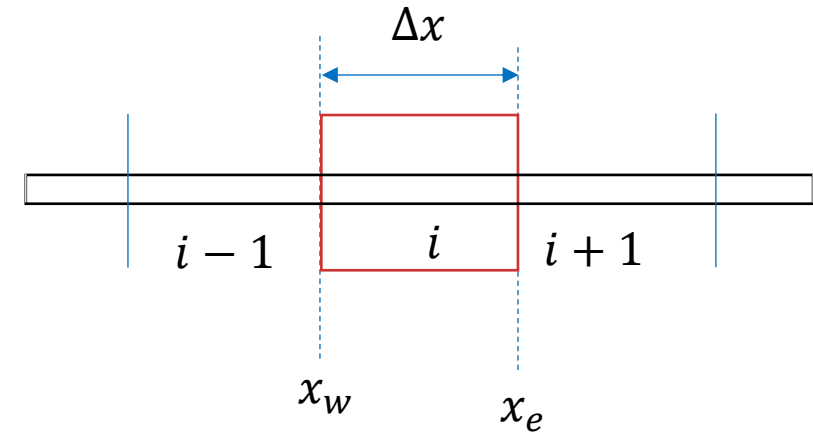
$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{a\bar{\phi}_i + b\bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x}$$

$$\bar{\phi}_i = \phi_e - \frac{1}{2}\phi'_e\Delta x + \frac{1}{3!}\phi''_e\Delta x^2 - \frac{1}{4!}\phi'''_e\Delta x^3 + \dots$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = \phi_e + \frac{1}{2}\phi'_e\Delta x + \frac{1}{3!}\phi''_e\Delta x^2 + \frac{1}{4!}\phi'''_e\Delta x^3 + \dots$$

$$\frac{a}{\Delta x}\bar{\phi}_i = \frac{a}{\Delta x}\phi_e - \frac{a}{2}\phi'_e + \frac{a\Delta x}{3!}\phi''_e - \frac{a\Delta x^2}{4!}\phi'''_e + \dots$$

$$\frac{b}{\Delta x}\bar{\phi}_{i+1} = \frac{b}{\Delta x}\phi_e + \frac{b}{2}\phi'_e + \frac{b\Delta x}{3!}\phi''_e + \frac{b\Delta x^2}{4!}\phi'''_e + \dots$$

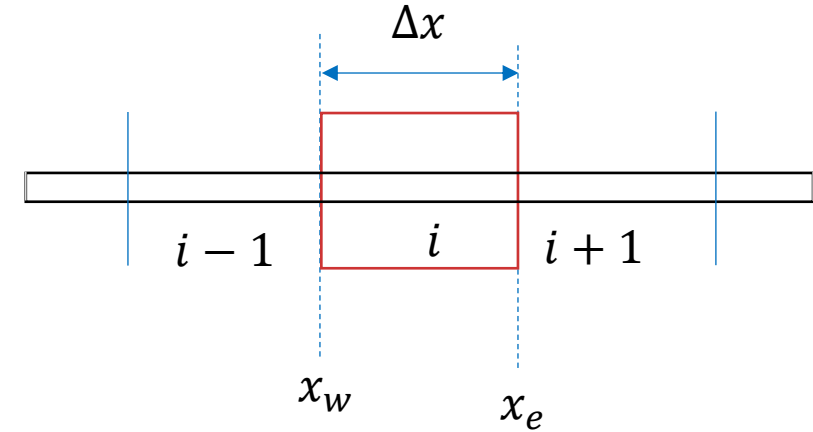




تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$



$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{a\bar{\phi}_i + b\bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} = \phi_e \left(\frac{a+b}{\Delta x} \right) + \phi'_e \left(\frac{-a+b}{2} \right) + \phi''_e \left(\frac{a+b}{3!} \right) \Delta x + \phi'''_e \left(\frac{-a+b}{4!} \right) \Delta x^2$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{-a+b}{2}=1 \end{cases} \rightarrow b=1 \quad \rightarrow a=-1$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{-\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$



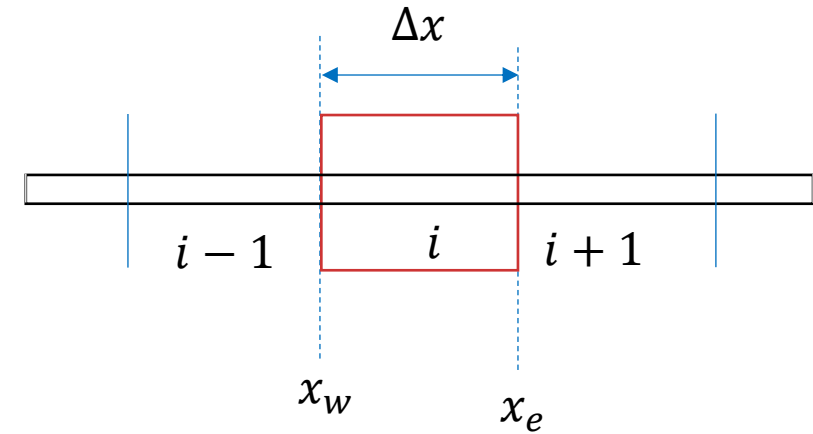


تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

$$\phi_e = c\bar{\phi}_i + d\bar{\phi}_{i+1}$$



$$\phi_e = c\bar{\phi}_i + d\bar{\phi}_{i+1} = \phi_e(c + d) + \phi'_e \left(\frac{-c + d}{2} \right) \Delta x + \phi''_e \left(\frac{c + d}{3!} \right) \Delta x^2 + \phi'''_e \left(\frac{-c + d}{4!} \right) \Delta x^3$$

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ -c + d = 0 \end{cases} \rightarrow d = \frac{1}{2} \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\phi_e = \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)$$





تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$

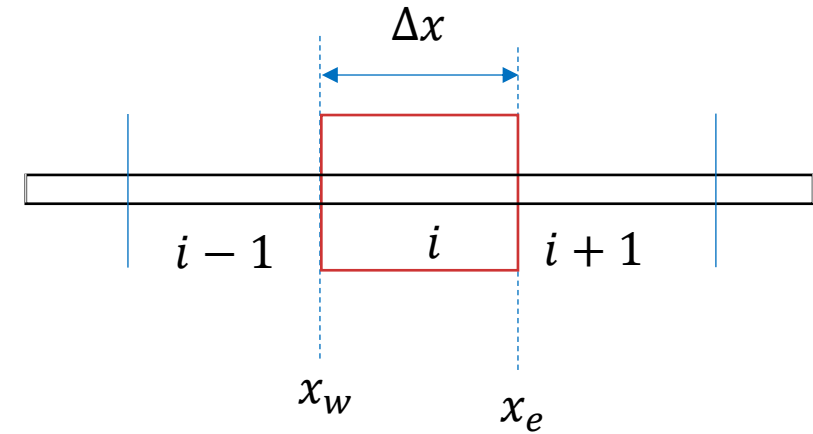
$$\phi_e = \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{-\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$F_w = \text{func}(\bar{\phi}_{i-1}, \bar{\phi}_i)$$

$$\phi_w = \frac{\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w = \frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$





تقریب شارها با استفاده از مقادیر متوسط حجم کنترل‌ها

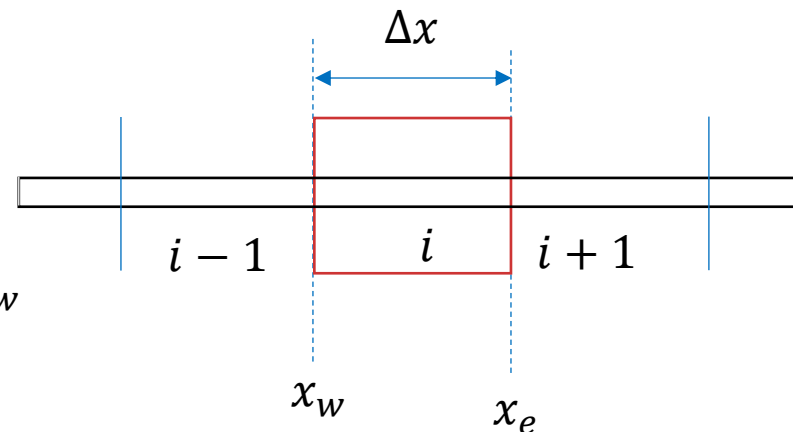
معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

$$\frac{1}{\Delta x} (F_e - F_w) = \bar{S}_i$$

$$F_e = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e + c\phi_e$$

$$F_w = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_w + c\phi_w$$



$$\frac{1}{\Delta x} \left\{ \left[\frac{-\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} + c \left(\frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} \right) \right] - \left[\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i}{\Delta x} + c \left(\frac{\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i}{2} \right) \right] \right\} = \bar{S}_i$$

$$\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) = \bar{S}_i$$

علت شباهت اتفاقی به تفاضل محدود

✓ مش یکنواخت

✓ تقریب مرتبه دوم





مرور مباحث گذشته

- گسسته‌سازی دامنه حل به حجم‌های محدود
- گسسته‌سازی معادلات به روش حجم محدود
- ✓ نوشتن معادلات به شکل پایستار
- ✓ میانگین‌گیری از معادله روی حجم کنترل
- ✓ گسسته‌سازی شارها بر حسب مقادیر میانگین

معادله دیفرانسیل
معمولی

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) = \cos \pi x$$

$$F = \frac{d\phi}{dx} + c\phi \quad S = \cos \pi x$$

شار پخشی

شار جابجایی

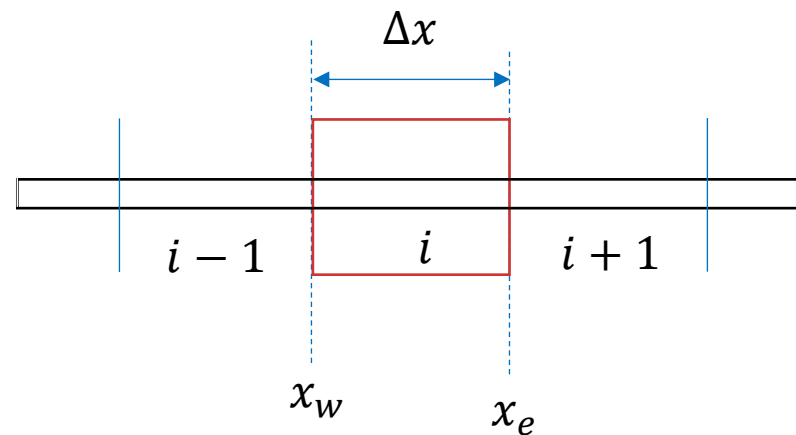
$$\frac{1}{\Delta x} (F_e - F_w) = \bar{S}_i$$

$$F_e = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e + c\phi_e$$

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{a\bar{\phi}_i + b\bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x}$$

$$\phi_e = c\bar{\phi}_i + d\bar{\phi}_{i+1}$$

$$\phi(x) = \phi_e + \phi'_e(x - x_e) + \frac{1}{2!} \phi''_e(x - x_e)^2 + \frac{1}{3!} \phi'''_e(x - x_e)^3 + \dots$$



$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \left(\phi_e + \phi'_e(x - x_e) + \frac{1}{2!} \phi''_e(x - x_e)^2 + \frac{1}{3!} \phi'''_e(x - x_e)^3 + \dots \right) dx$$

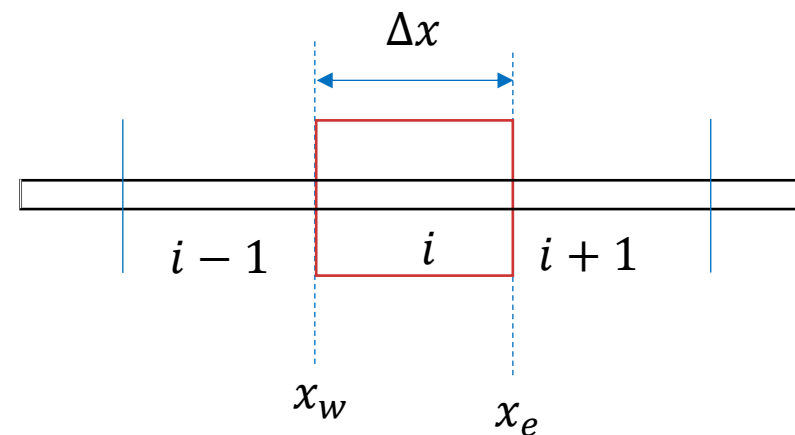


مرور مباحث گذشته

معادله دیفرانسیل $\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$

$$\bar{\phi}_i = \phi_e - \frac{1}{2} \phi'_e \Delta x + \frac{1}{3!} \phi''_e \Delta x^2 - \frac{1}{4!} \phi'''_e \Delta x^3 + \dots$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = \phi_e + \frac{1}{2} \phi'_e \Delta x + \frac{1}{3!} \phi''_e \Delta x^2 + \frac{1}{4!} \phi'''_e \Delta x^3 + \dots$$



$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{-\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\phi_e = \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = \bar{S}_i$$





تقریب چشمه

معادله دیفرانسیل

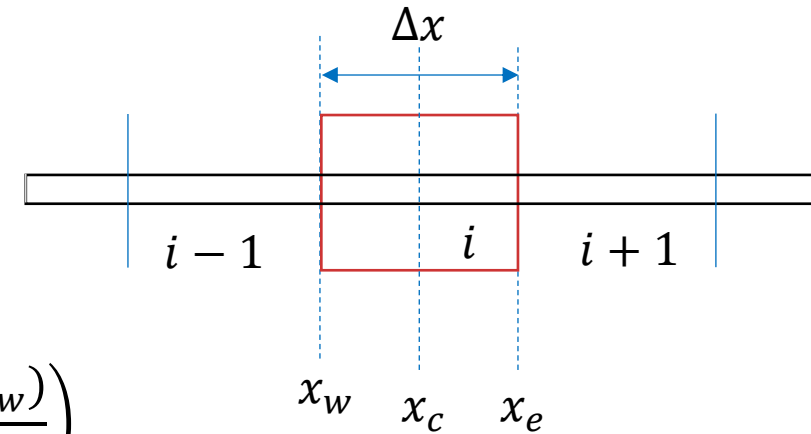
$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = \cos \pi x$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\pi\Delta x} \{[\sin \pi x]_e - [\sin \pi x]_w\}$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\pi\Delta x} (\sin \pi x_e - \sin \pi x_w) = \frac{1}{\pi\Delta x} \left(2 \sin \frac{\pi(x_e - x_w)}{2} \cos \frac{\pi(x_e + x_w)}{2} \right)$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\pi\Delta x} \left(2 \sin \frac{\pi\Delta x}{2} \cos \pi x_c \right) = \frac{1}{\pi\Delta x} [(\pi\Delta x + O(\Delta x^3)) \cos \pi x_c]$$

$$\bar{S}_i = \cos \pi x_c + O(\Delta x^2) = S_c + O(\Delta x^2)$$





تقریب چشمه

$$\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = \bar{S}_i$$

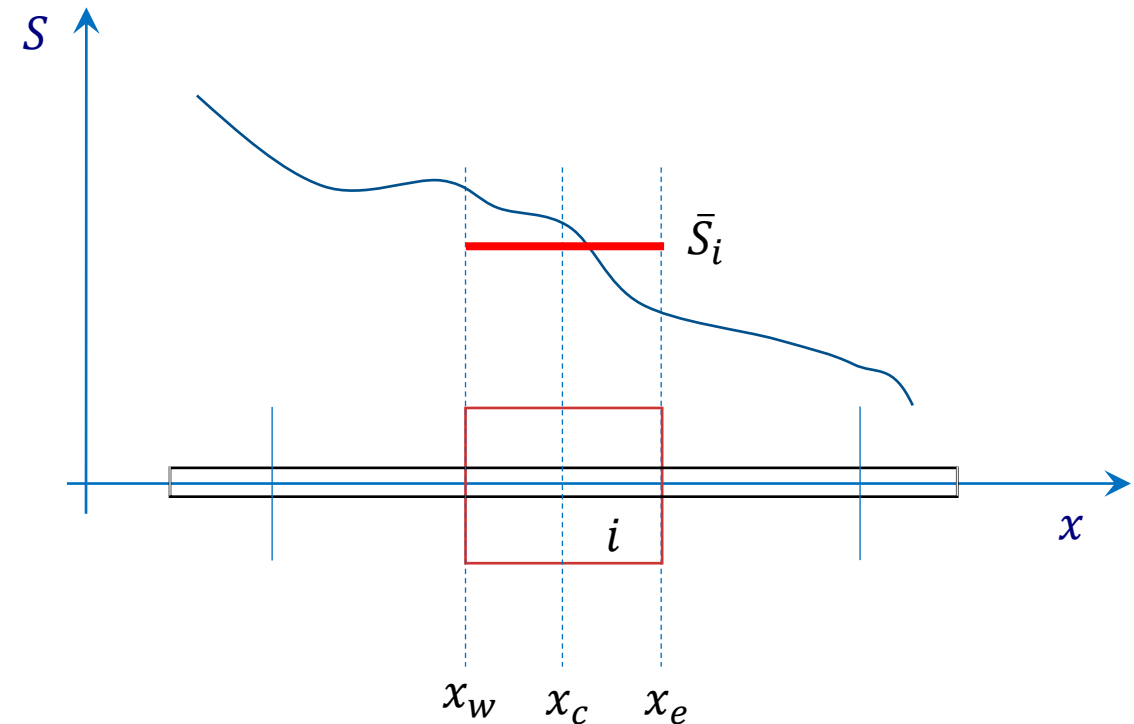
محاسبه چشمه:

- احتمال عدم انتگرال پذیری چشمه
- لزوم جامعیت روش محاسبه انتگرال و استفاده از روش‌های عددی

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} S dx$$

$$S(x) = S_c + S'_c(x - x_c) + \frac{1}{2!} S''_c(x - x_c)^2 + \frac{1}{3!} S'''_c(x - x_c)^3 + \dots$$

$$\xi = x - x_c$$





تقریب چشمه

$$\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = \bar{S}_i$$

محاسبه چشمه:

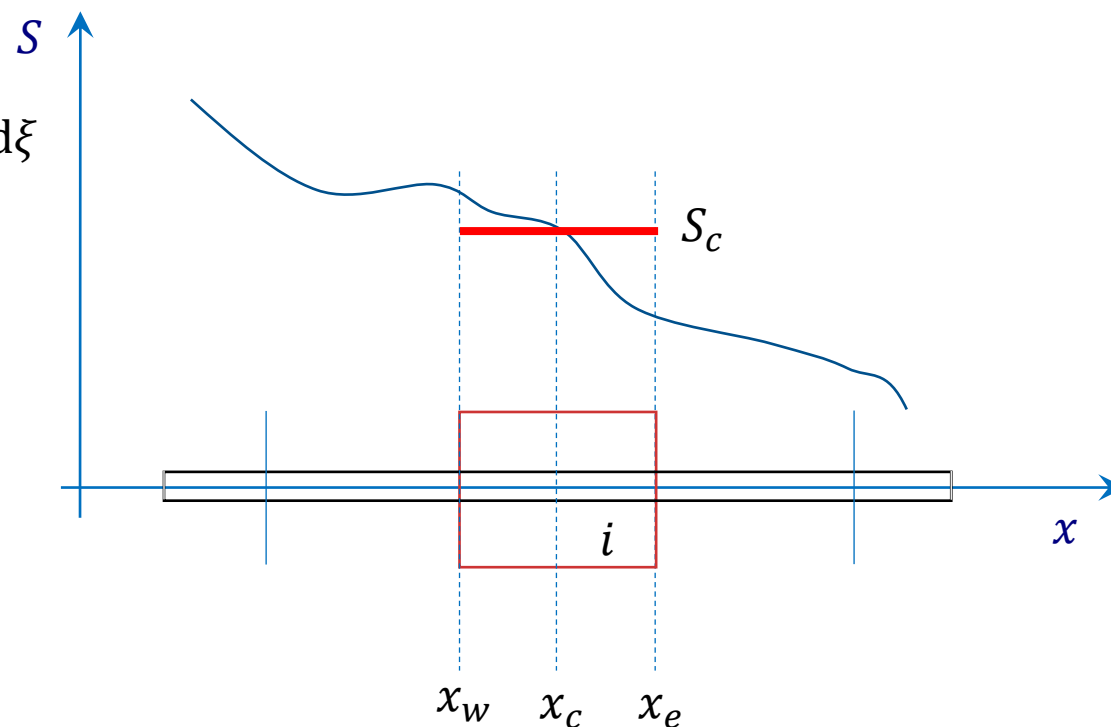
- احتمال عدم انتگرال پذیری چشمه
- لزوم جامعیت روش محاسبه انتگرال و استفاده از روش‌های عددی

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} S dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \left(S_c + S'_c \xi + \frac{1}{2!} S''_c \xi^2 + \frac{1}{3!} S'''_c \xi^3 + \dots \right) d\xi$$

$$\bar{S}_i = S_c + \frac{1}{3! \times 4} S''_c \Delta x^2 + \dots$$

$$\bar{S}_i = S_c + O(\Delta x^2)$$





تقریب چشمه

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} S dx$$

$$S = a\xi^2 + b\xi + c$$

افزایش مرتبه دقت با استفاده از روش‌های انتگرال عددی همچون:

- انتگرال سیمپسون
- قانون تربیع گاوس

$$@\xi = 0; S = S_c$$

$$@\xi = -\frac{\Delta x}{2}; S = S_w$$

$$@\xi = \frac{\Delta x}{2}; S = S_e$$

$$\begin{cases} c = S_c \\ a \frac{\Delta x^2}{4} - b \frac{\Delta x}{2} + c = S_w \\ a \frac{\Delta x^2}{4} + b \frac{\Delta x}{2} + c = S_e \end{cases}$$

$$\rightarrow a = \frac{2}{\Delta x^2} (S_w - 2S_c + S_e)$$

$$\rightarrow b = \frac{1}{\Delta x} (S_e - S_w)$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} (a\xi^2 + b\xi + c) d\xi = \frac{a\Delta x^2}{12} + c$$

$$= \frac{1}{6} (S_w - 2S_c + S_e + 6S_c) = \frac{1}{6} (S_w + 4S_c + S_e)$$





تقریب چشمه

$$\bar{S}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} S dx \quad \bar{S}_i = aS_w + bS_c + cS_e$$

$$\bar{S}_i = S_c + \frac{1}{24} S_c'' \Delta x^2 + O(\Delta x^4)$$

$$S_w = S_c - \frac{1}{2} S_c' \Delta x + \frac{1}{2! \times 4} S_c'' \Delta x^2 - \frac{1}{3! \times 8} S_c''' \Delta x^3 + \frac{1}{4! \times 16} S_c'''' \Delta x^4 - \dots$$

$$S_c = S_c$$

$$S_e = S_c + \frac{1}{2} S_c' \Delta x + \frac{1}{2! \times 4} S_c'' \Delta x^2 + \frac{1}{3! \times 8} S_c''' \Delta x^3 + \frac{1}{4! \times 16} S_c'''' \Delta x^4 + \dots$$

افزایش مرتبه دقت با استفاده از روش‌های انتگرال عددی:

- انتگرال سیمپسون
- قانون تربیع گاوس

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -a + c = 0 \\ \frac{a + c}{8} = \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{6} \quad \rightarrow c = \frac{1}{6} \quad \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\bar{S}_i = \frac{1}{6} (S_w + 4S_c + S_e) + O(\Delta x^4)$$





$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \phi dx$$

$$\bar{\phi}_i = \phi_c + O(\Delta x^2)$$

$$\bar{\phi}_i = \frac{1}{6}(\phi_w + 4\phi_c + \phi_e) + O(\Delta x^4)$$

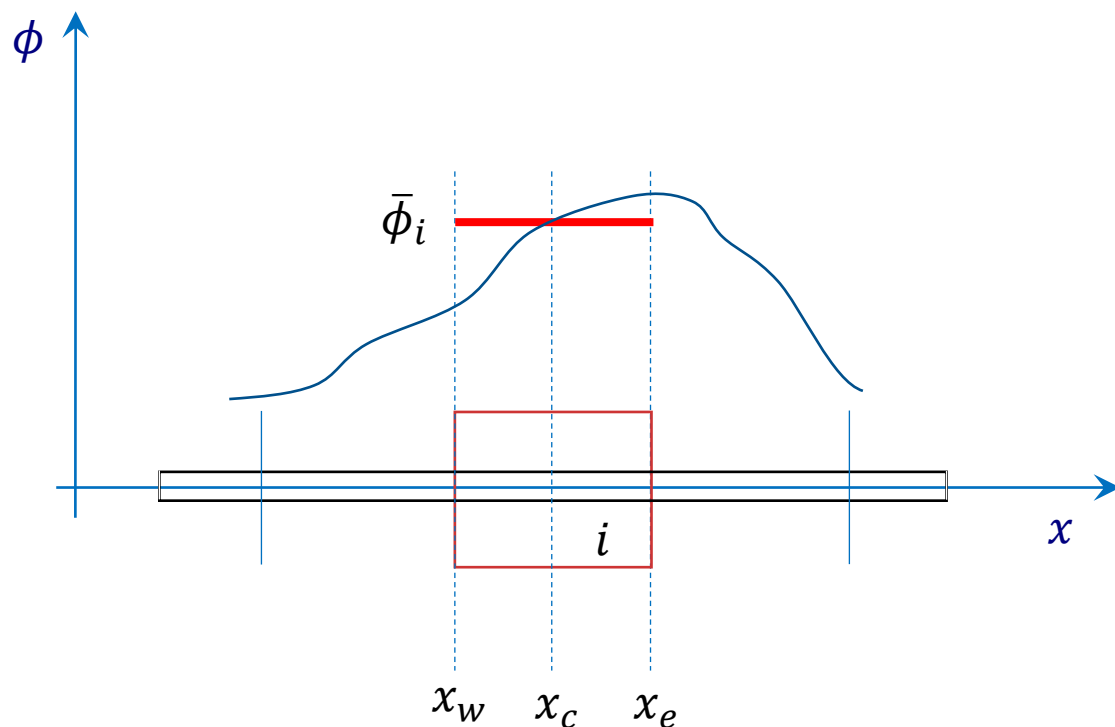
$$\phi_{exact} = \checkmark$$

$$\bar{\phi}_{i,num} - \bar{\phi}_{i,exact} = O(\Delta x^2) \quad =?$$

$$\bar{\phi}_{i,exact} = ?$$

$$\bar{\phi}_{i,exact} = \phi_{c,exact} + O(\Delta x^2)$$

$$\bar{\phi}_{i,num} - \phi_{c,exact} = O(\Delta x^2)$$



با اطلاع از حل دقیق معادله، برای محاسبه خطا می‌توان بجای مقایسه نتایج حل حجم محدود با مقدار میانگین پاسخ، نتایج عددی را با مقدار تابع جواب در مرکز حجم محدود مقایسه نمود





$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = a\phi \quad S = a\phi$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} S dx$$

$$\frac{1}{\Delta x} [F_e - F_w] = S_c$$

$$\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = a\phi_c$$

$$\bar{\phi}_i = \phi_c + O(\Delta x^2) \rightarrow \phi_c = \bar{\phi}_i + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = a\bar{\phi}_i$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx} + c\phi \right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} a\phi dx$$

$$\frac{1}{\Delta x} [F_e - F_w] = a\bar{\phi}_i$$

$$\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = a\bar{\phi}_i$$





$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + c \frac{d\phi}{dx} = a\phi$$

$$S = a\phi$$

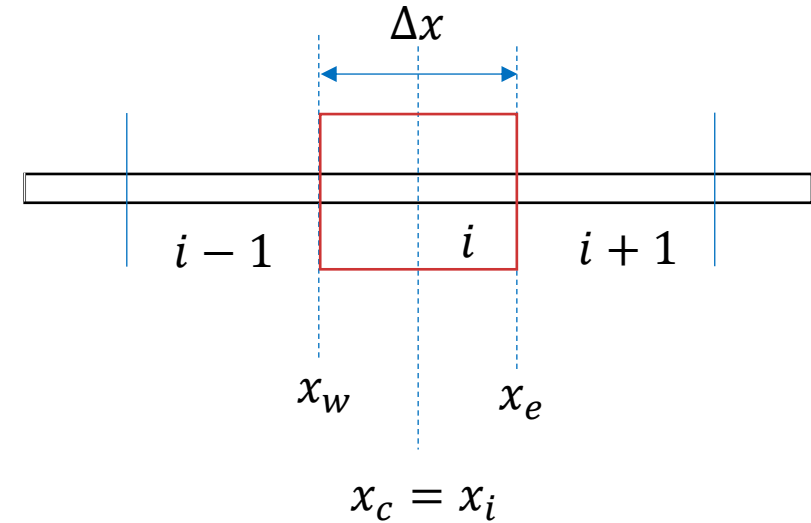
$$F = \frac{d\phi}{dx} + c\phi$$

$$\frac{1}{\Delta x} [F_e - F_w] = a\phi_c$$

$$F_e = \text{func}(\phi_i, \phi_{i+1}, \dots) \quad \phi'_e, \phi_e = \text{func}(\phi_i, \phi_{i+1}, \dots)$$

$$F_w = \text{func}(\phi_{i-1}, \phi_i, \dots) \quad \phi'_w, \phi_w = \text{func}(\phi_{i-1}, \phi_i, \dots)$$

$$\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} + c \left(\frac{-\phi_{i-1} + \phi_{i+1}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x^2) = a\phi_i$$





رویکردهای تقریب نقطه‌ای در حجم محدود

معادله جابجایی پخش (Convection-Diffusion)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(c\phi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

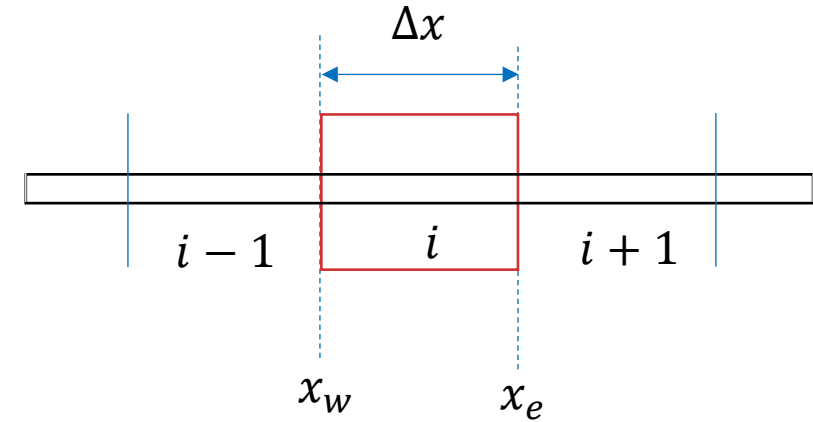
↑ جابجایی
↑ پخش

معادله با مشتقات جزئی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(c\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(c\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] dx = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial}{\partial x} \left(c\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \phi dx \right] + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial}{\partial x} F dx = 0$$

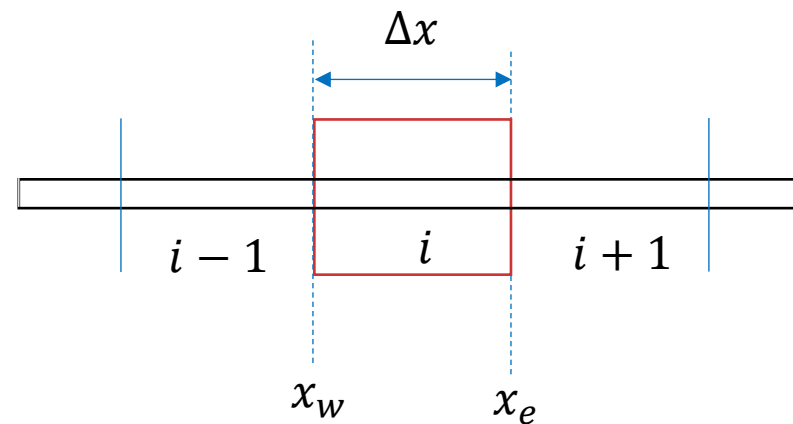
↑ $\bar{\phi}_i$
 $F = c\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x}$





رویکردهای تقریب نقطه‌ای در حجم محدود

معادله جابجایی پخش (Convection-Diffusion)



صورت نیمه گسسته (Semi-discrete)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (c\phi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} [F_e - F_w] = 0$$

لزوم گسسته‌سازی شارها بر
حسب میانگین تابع جواب هدف

$$F_e = \text{func}(\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_{i+1}, \dots)$$

$$\phi'_e, \phi_e = \text{func}(\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_{i+1}, \dots)$$

$$F_w = \text{func}(\bar{\phi}_{i-1}, \bar{\phi}_i, \dots)$$

$$\phi'_w, \phi_w = \text{func}(\bar{\phi}_{i-1}, \bar{\phi}_i, \dots)$$

$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} - \alpha \left(\frac{\bar{\phi}_{i-1} - 2\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x^2} \right) + c \left(\frac{-\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_{i+1}}{2\Delta x} \right) = 0$$





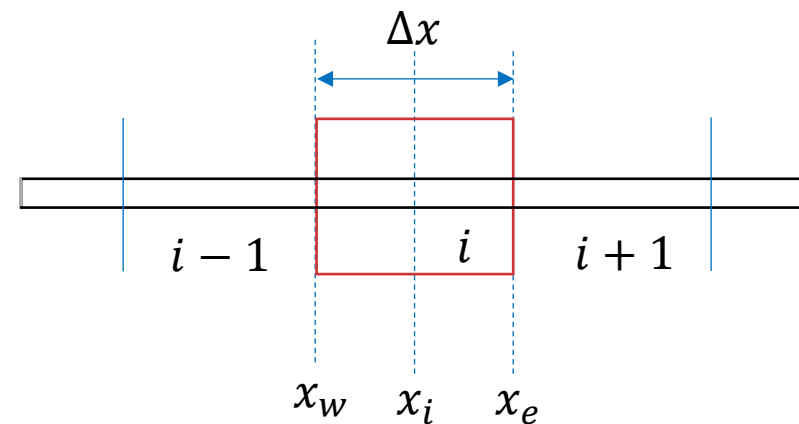
رویکردهای تقریب نقطه‌ای در حجم محدود

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(c\phi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

صفر

$$\frac{1}{\Delta x} [F_e - F_w] = 0$$

امکان گسسته‌سازی شارها
بر حسب مقادیر نقطه‌ای



$$F_e = \text{func}(\phi_i, \phi_{i+1}, \dots) \quad \phi'_e, \phi_e = \text{func}(\phi_i, \phi_{i+1}, \dots)$$

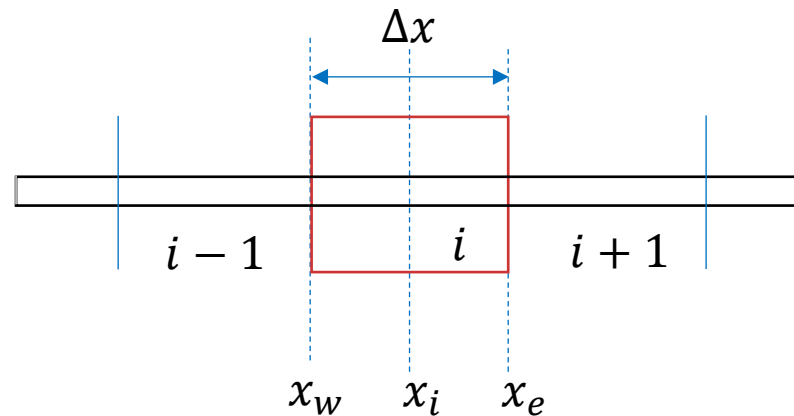
$$F_w = \text{func}(\phi_{i-1}, \phi_i, \dots) \quad \phi'_w, \phi_w = \text{func}(\phi_{i-1}, \phi_i, \dots)$$

$$-\alpha \left(\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} \right) + c \left(\frac{-\phi_{i-1} + \phi_{i+1}}{2\Delta x} \right) = 0$$





رویکردهای تقریب نقطه‌ای در حجم محدود



تقریب نقطه‌ای:

✓ مسائل پایا

✓ مسائل با دقت مرتبه ۲

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (c\phi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\bar{\phi}_{num} - \bar{\phi}_{exact} = O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} [F_e - F_w] = 0$$

$$\bar{\phi}_i = \phi_i + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} [F_e - F_w] = 0$$

امکان گسسته‌سازی شارها

بر حسب مقادیر نقطه‌ای

$$\phi_i - \alpha \left(\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2} \right) + c \left(\frac{-\phi_{i-1} + \phi_{i+1}}{2\Delta x} \right) = 0$$

QUICK

Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics

$$\phi_e = -\frac{1}{8}\phi_{i-1} + \frac{6}{8}\phi_i + \frac{3}{8}\phi_{i+1} \quad c > 0$$





رویکردهای گسسته‌سازی شار

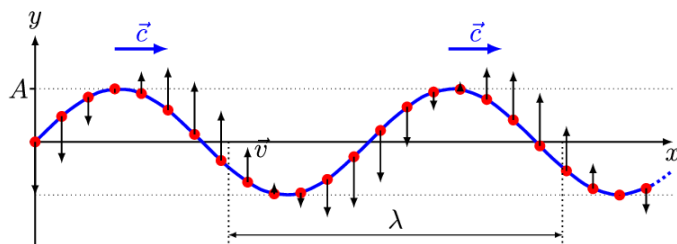
$$\frac{\partial(c\phi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

$$F = \underbrace{c\phi}_{\text{جابجایی}} - \underbrace{\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x}}_{\text{پخش}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$c > 0$$



جابجایی

$$F = \text{func}(\phi)$$

انتقال خاصیت ناشی از حرکت و سرعت

پخش

$$F = \text{func}\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \quad \text{انتقال خاصیت ناشی از خاصیت پخشی (گرادیان)}$$

$$\nabla^2 T = 0$$

هدایت حرارتی
صفحه جامد



رویکردهای گسسته‌سازی شار

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

جابجایی

$$c > 0$$

$$F = c\phi$$

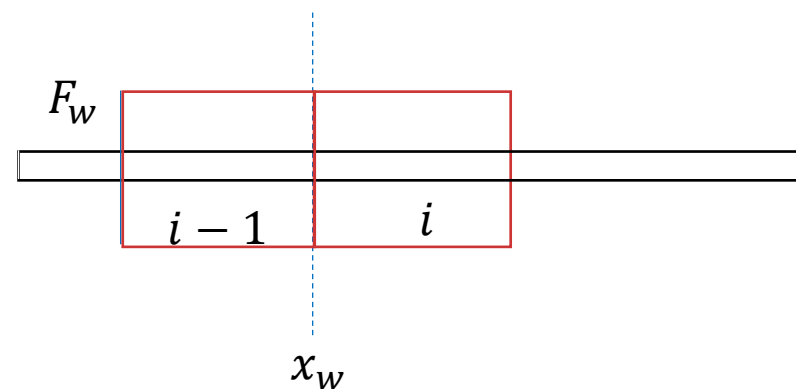
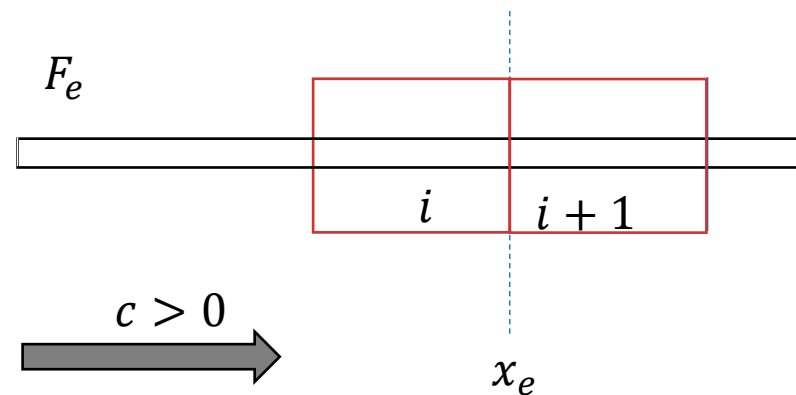
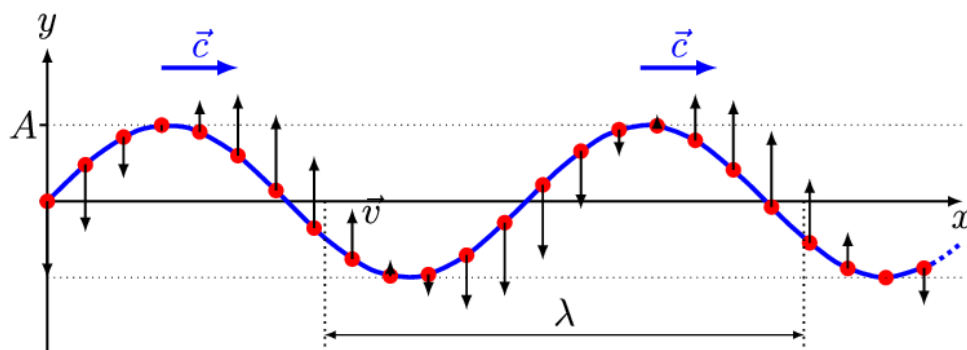
$$\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} + \frac{c}{\Delta x} [\phi_e - \phi_w] = 0$$

گسسته‌سازی مرکزی (Central)

$$\phi_e = \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)$$

$$\phi_w = \frac{\bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i}{2} + O(\Delta x^2)$$

حل ناپایدار





رویکردهای گسسته‌سازی شار

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

جابجایی

$$c > 0$$

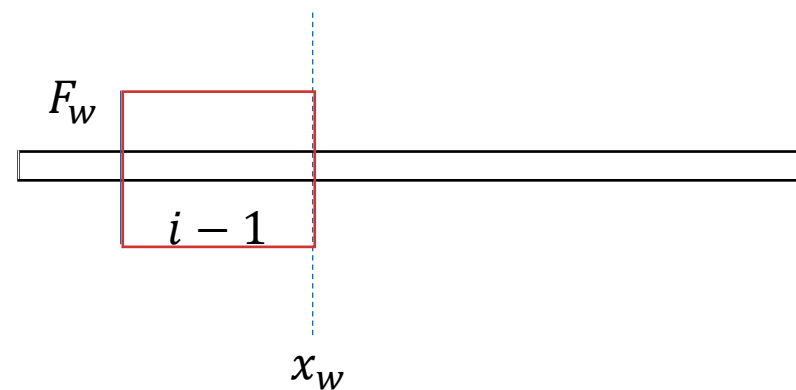
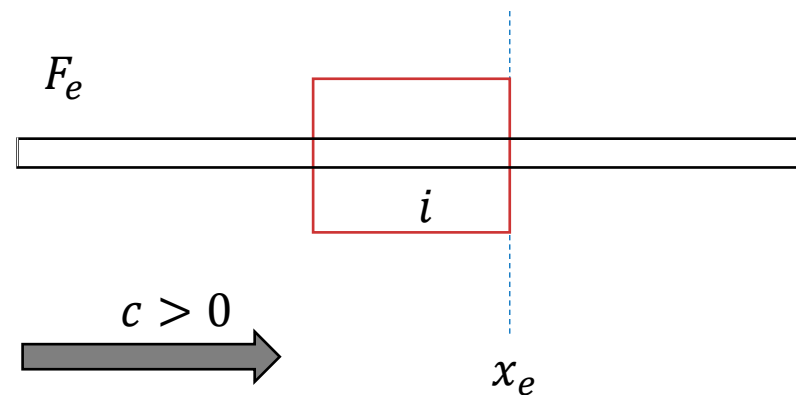
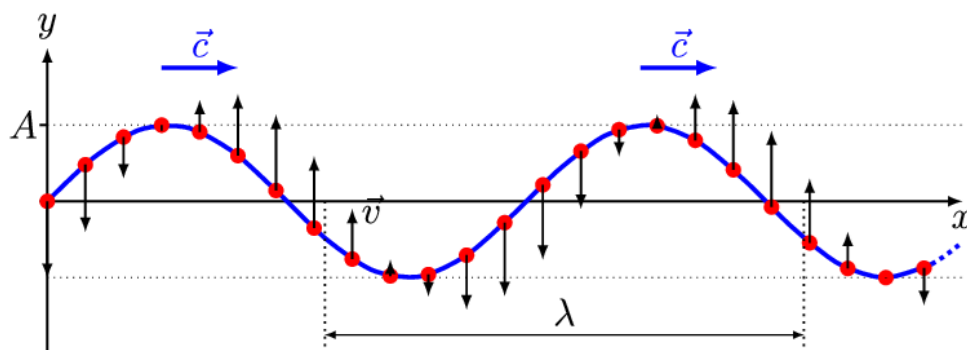
$$F = c\phi \quad \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} + \frac{c}{\Delta x} [\phi_e - \phi_w] = 0$$

گسسته‌سازی بادسو مرتبه اول (First-order Upwind)

$$\phi_e = \bar{\phi}_i + O(\Delta x)$$

$$\phi_w = \bar{\phi}_{i-1} + O(\Delta x)$$

حل پایدار





رویکردهای گسته‌سازی شار

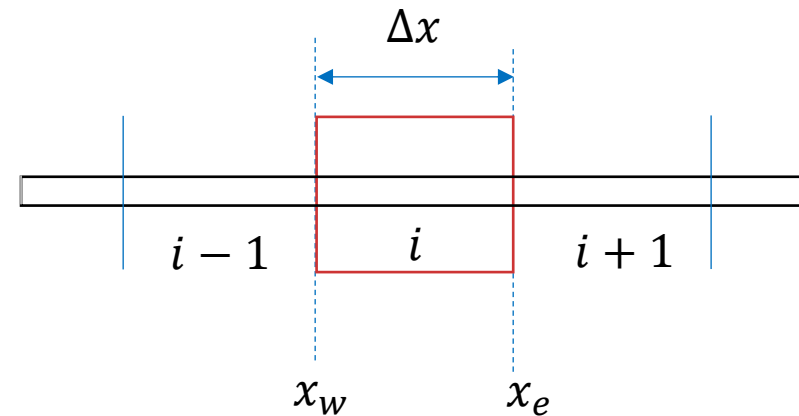
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(c\phi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(c\phi)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

شار پخشی

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{-\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

گسته‌سازی مرکزی



شار جابجایی

$$\phi_e = \begin{cases} \bar{\phi}_i + O(\Delta x), & Pe_e > 2 \\ \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2), & -2 < Pe_e < 2 \\ \bar{\phi}_{i+1} + O(\Delta x), & Pe_e < -2 \end{cases}$$

گسته‌سازی دوگانه

(Hybrid)

$$Pe_e = \frac{c\Delta x}{\alpha}$$

عدد پکله (Peclet)

$$Pe = \frac{cL}{\alpha}$$

نسبت بی‌بعد جابجایی به پخش

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$





رویکردهای گسسته‌سازی شار

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

جابجایی

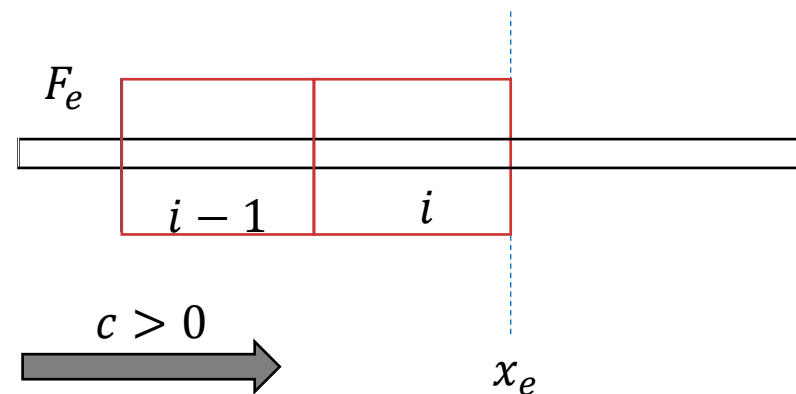
$$F = c\phi$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} + \frac{c}{\Delta x} [\phi_e - \phi_w] = 0$$

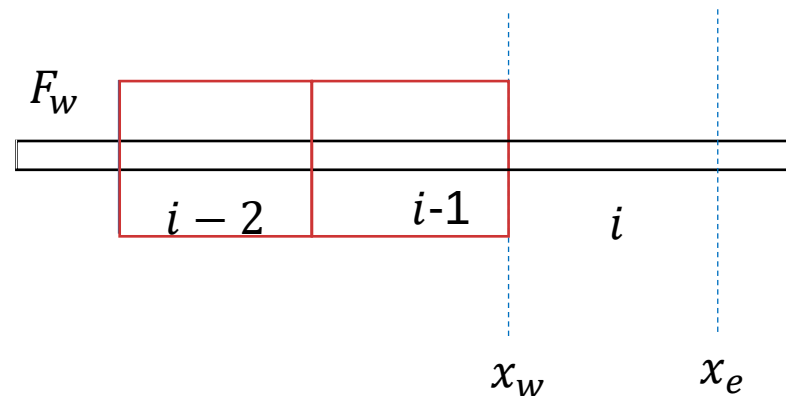
گسسته‌سازی بادسو مرتبه دوم (Second-order Upwind)

$$c > 0: \begin{cases} \phi_e = \frac{-\bar{\phi}_{i-1} + 3\bar{\phi}_i}{2} + O(\Delta x^2) \\ \phi_w = \frac{-\bar{\phi}_{i-2} + 3\bar{\phi}_{i-1}}{2} + O(\Delta x^2) \end{cases}$$

حل پایدار



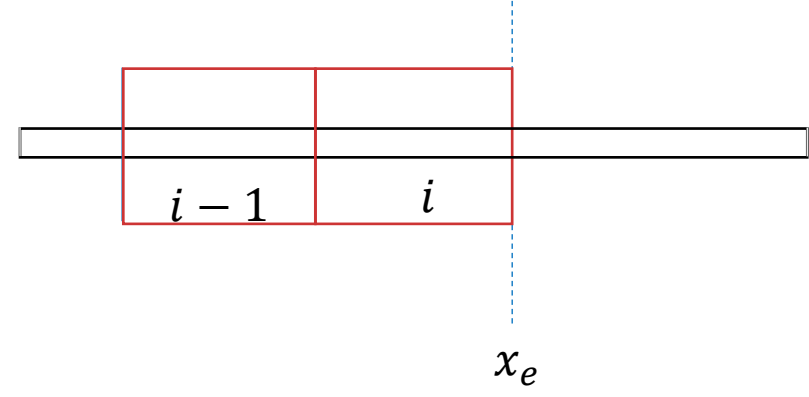
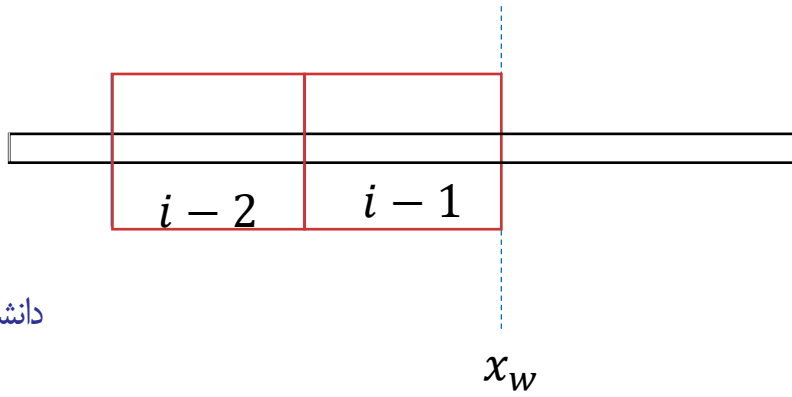
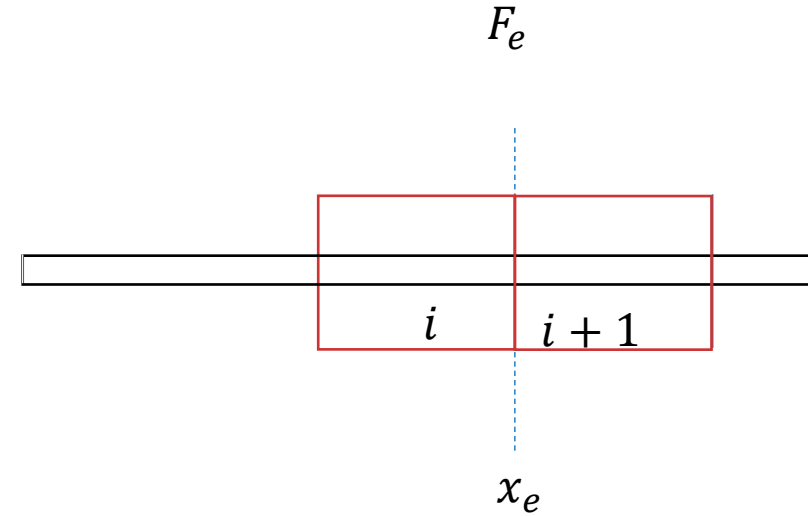
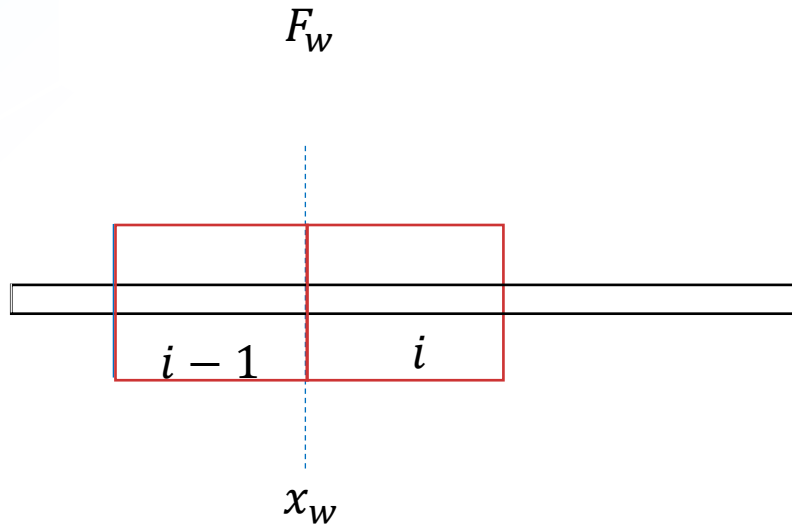
$$c < 0: \begin{cases} \phi_e = \frac{3\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_{i+2}}{2} + O(\Delta x^2) \\ \phi_w = \frac{3\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2) \end{cases}$$





رویکردهای گسسته‌سازی شار

شار در تمامی مرزها باید به یک شکل گسسته شود.



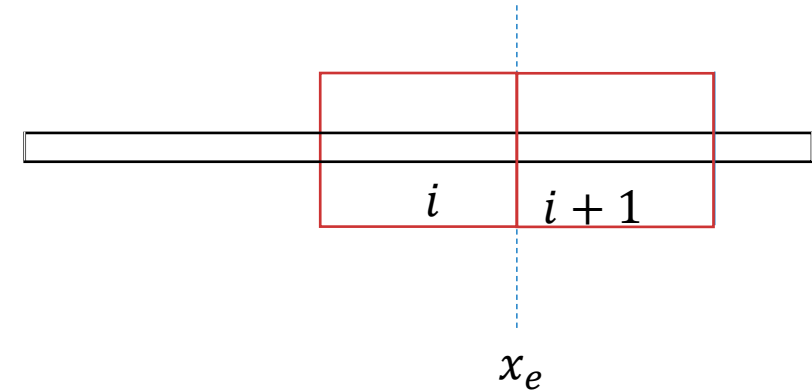
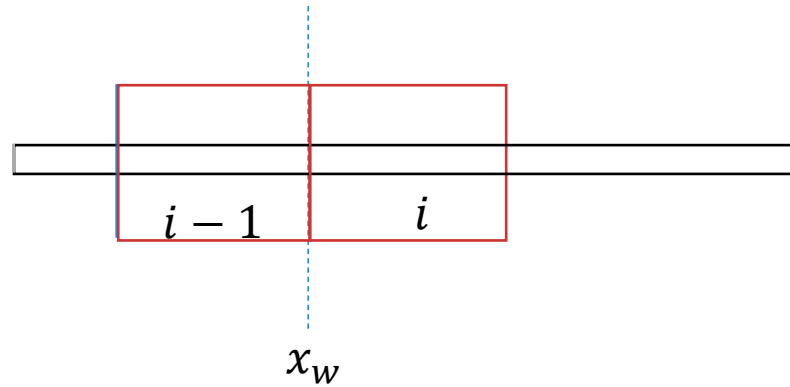


رویکردهای گسسته‌سازی شار

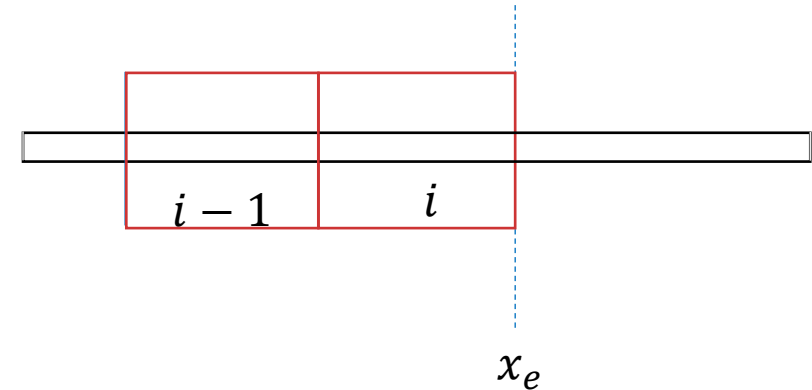
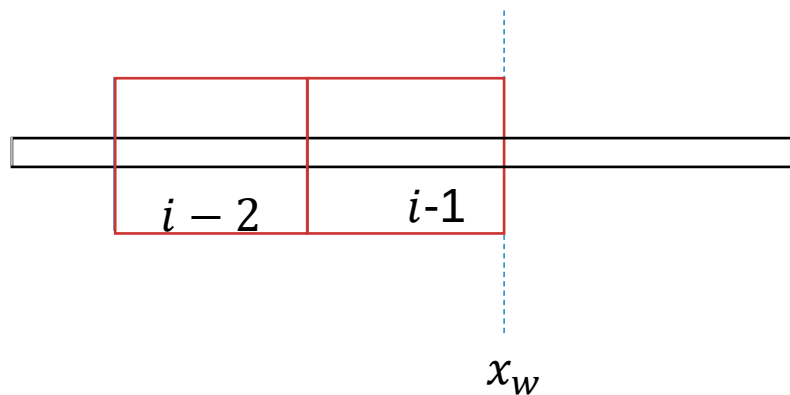
گسسته‌سازی شار پخشی به صورت مرکزی و
شار جابجایی به صورت بادسوی مرتبه ۲

شارهای جابجایی و پخشی می‌توانند به شکل‌های متفاوتی گسسته شوند

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e$$



$$\phi_e$$





مرور مباحث گذشته

- گسسته‌سازی دامنه حل به حجم‌های محدود
- گسسته‌سازی معادلات به روش حجم محدود

✓ نوشتن معادلات به شکل پایستار

✓ میانگین‌گیری از معادله روی حجم کنترل

✓ گسسته‌سازی شارها بر حسب مقادیر میانگین (کاربرد عمومی)

✓ امکان گسسته‌سازی نقطه‌ای (مسائل پایا یا دقت مرتبه ۲)

انواع شار:

✓ شار جابجایی: انتقال در اثر حرکت و سرعت $F = func(\phi)$

✓ شار پخشی: انتقال در اثر خاصیت پخشی $F = func\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$

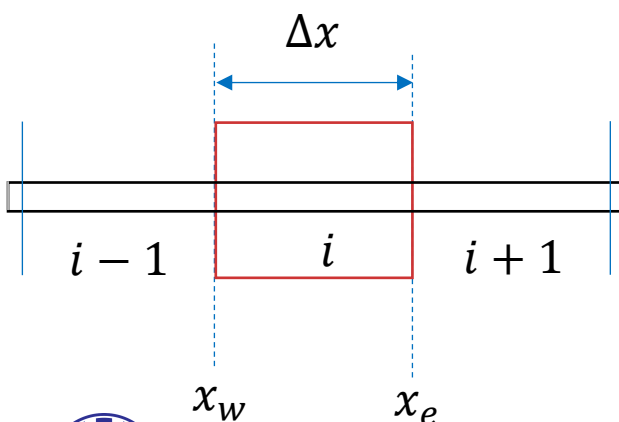
معادله دیفرانسیل

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(c\phi)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(c\phi - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \phi$$

$$F = -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} + c\phi \quad S = \phi$$

شار پخشی شار جابجایی



$$\frac{d\bar{\phi}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x} (F_e - F_w) = \bar{S}_i$$

صورت نیمه گسسته

$$\bar{S}_i = S_c + O(\Delta x^2)$$

$$F_e = -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e + c\phi_e \quad F_e = func(\bar{\phi}_i, \bar{\phi}_{i+1}, \dots) \quad F_e = func(\phi_i, \phi_{i+1}, \dots)$$





مرور مباحث گذشته

انواع روش‌های گسسته‌سازی

مرکزی

$$\phi_e = \frac{\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{2} + O(\Delta x^2)$$

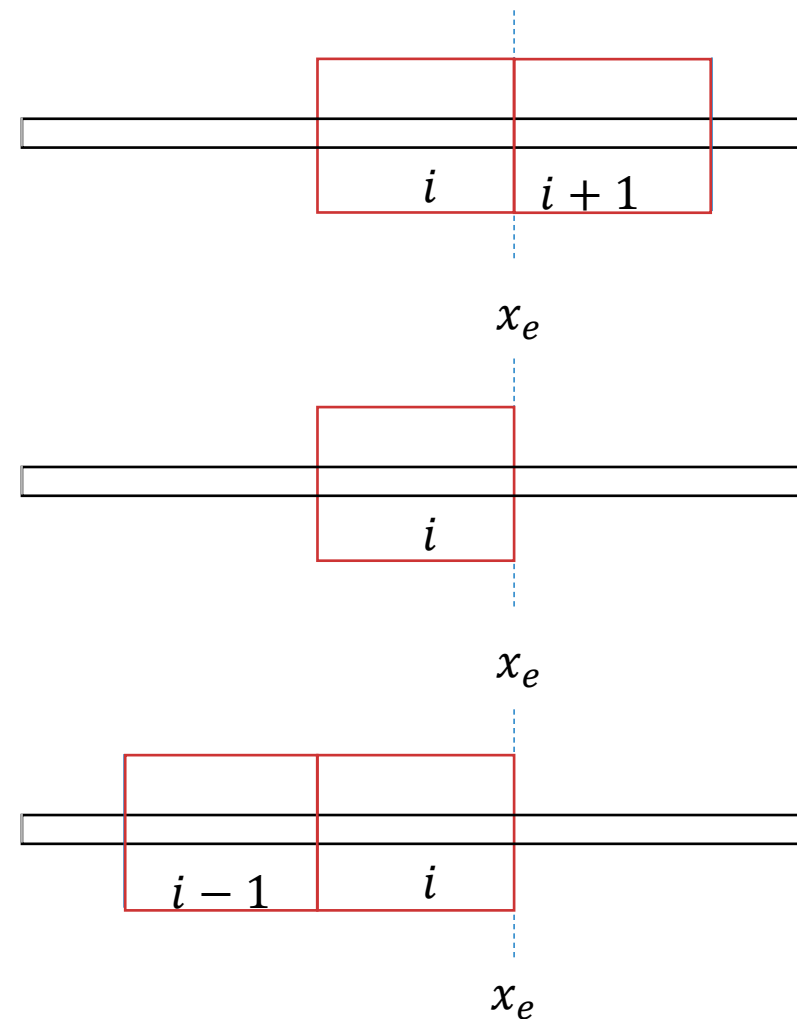
$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_e = \frac{-\bar{\phi}_i + \bar{\phi}_{i+1}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

بازسوی مرتبه اول

$$\phi_e = \bar{\phi}_i + O(\Delta x) \quad c > 0$$

بازسوی مرتبه دوم

$$\phi_e = \frac{-\bar{\phi}_{i-1} + 3\bar{\phi}_i}{2} + O(\Delta x^2) \quad c > 0$$



گسسته‌سازی شارهای جابجایی و پخشی می‌تواند به شکل‌های متفاوتی انجام شود اما در تمامی مرزها باید یکسان باشد





حجم محدود در مسائل دو بعدی و سه بعدی

صورت پایستار

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = S$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

ϕ اسکالر

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = S$$

شار (Flux)

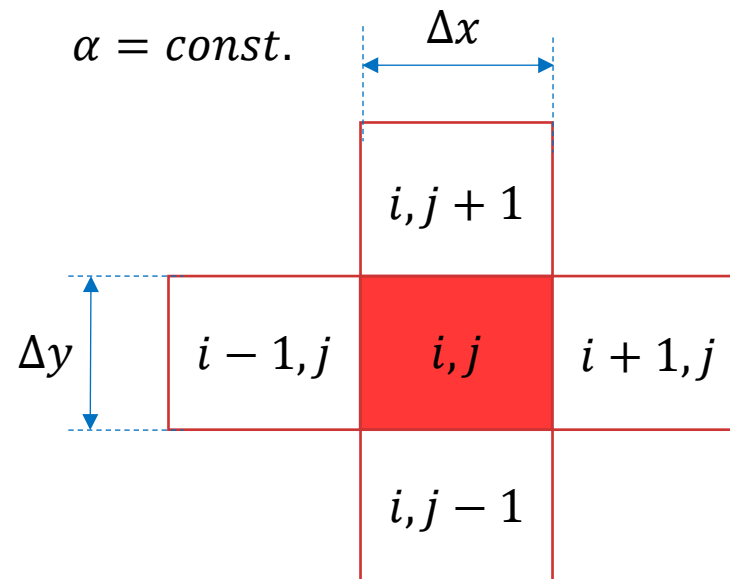
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad \phi = T$$

انتقال حرارت دو بعدی صفحه جامد

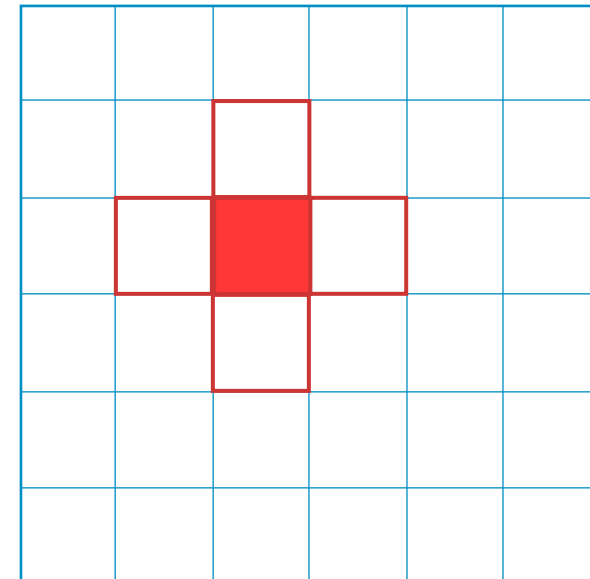
تولید شبکه

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$\alpha = const.$



شبکه کارتزین





حجم محدود در مسائل دو بعدی

نوشتن معادله به صورت پایستار

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = S$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\alpha \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0$$

$$F_x = -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad F_y = -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\alpha \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (-\alpha \nabla \phi) = 0$$





حجم محدود در مسائل دو بعدی

میانگین گیری از معادله روی هر حجم کنترل

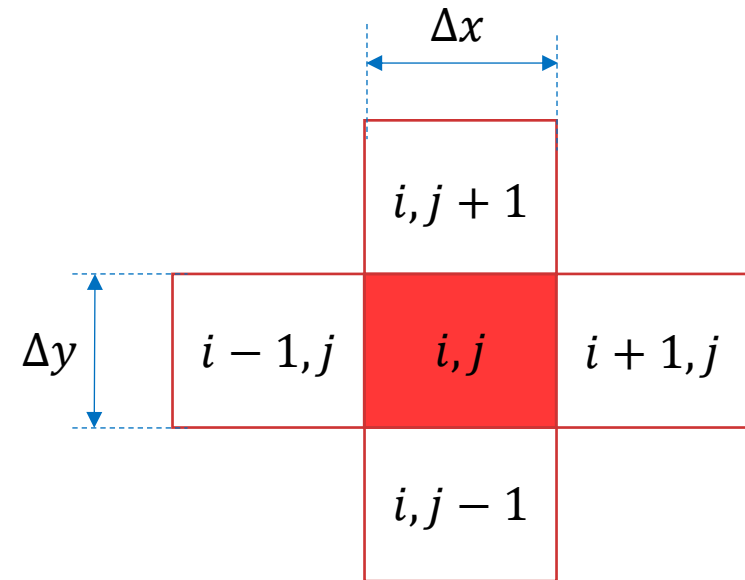
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (-\alpha \nabla \phi) = 0$$

$$\bar{f}_{i,j} = \frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} f dA$$

$$\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (-\alpha \nabla \phi) \right) dA = 0$$

$$\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dA - \frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} (\nabla \cdot (\alpha \nabla \phi)) dA = 0$$

$$\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dA = \frac{\alpha}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dA$$





حجم محدود در مسائل دو بعدی

میانگین گیری از معادله روی هر حجم کنترل

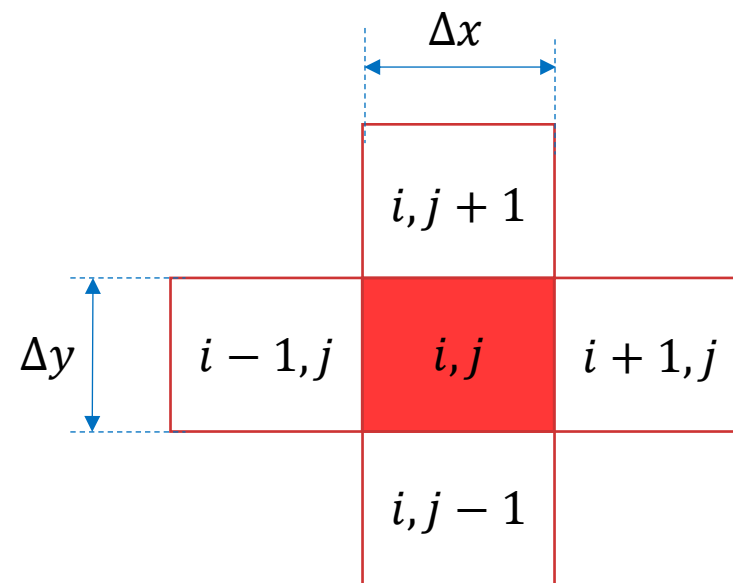
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (-\alpha \nabla \phi) = 0$$

$$\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dA = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} (\phi) dA \right]$$

$$\bar{f}_{i,j} = \frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} f dA$$

$$\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dA = \frac{\partial \bar{\phi}_{i,j}}{\partial t}$$

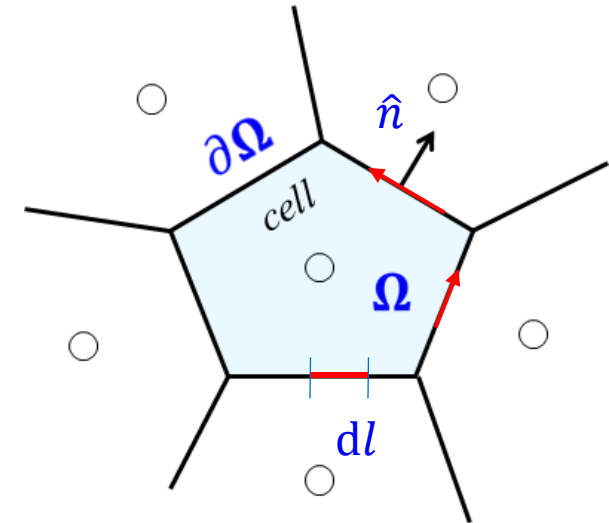
$$\frac{\partial \bar{\phi}_{i,j}}{\partial t} = \frac{\alpha}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dA$$





حجم محدود در مسائل دو بعدی

قضیه دیورژانس گاوس (گرین-گاوس)



$$\frac{1}{A_{i,j}} \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dl$$

انتگرال شار (Flux Integral)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (-\alpha \nabla \phi) = 0$$

$$\frac{\alpha}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dA = ?$$

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int_{x_w}^{x_e} dF = F_e - F_w$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{F}) dA = \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dl$$

$$F = -\alpha \nabla \phi$$

$$\int_{A_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dA = \oint_{\partial A_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} \, dl$$





حجم محدود در مسائل دو بعدی

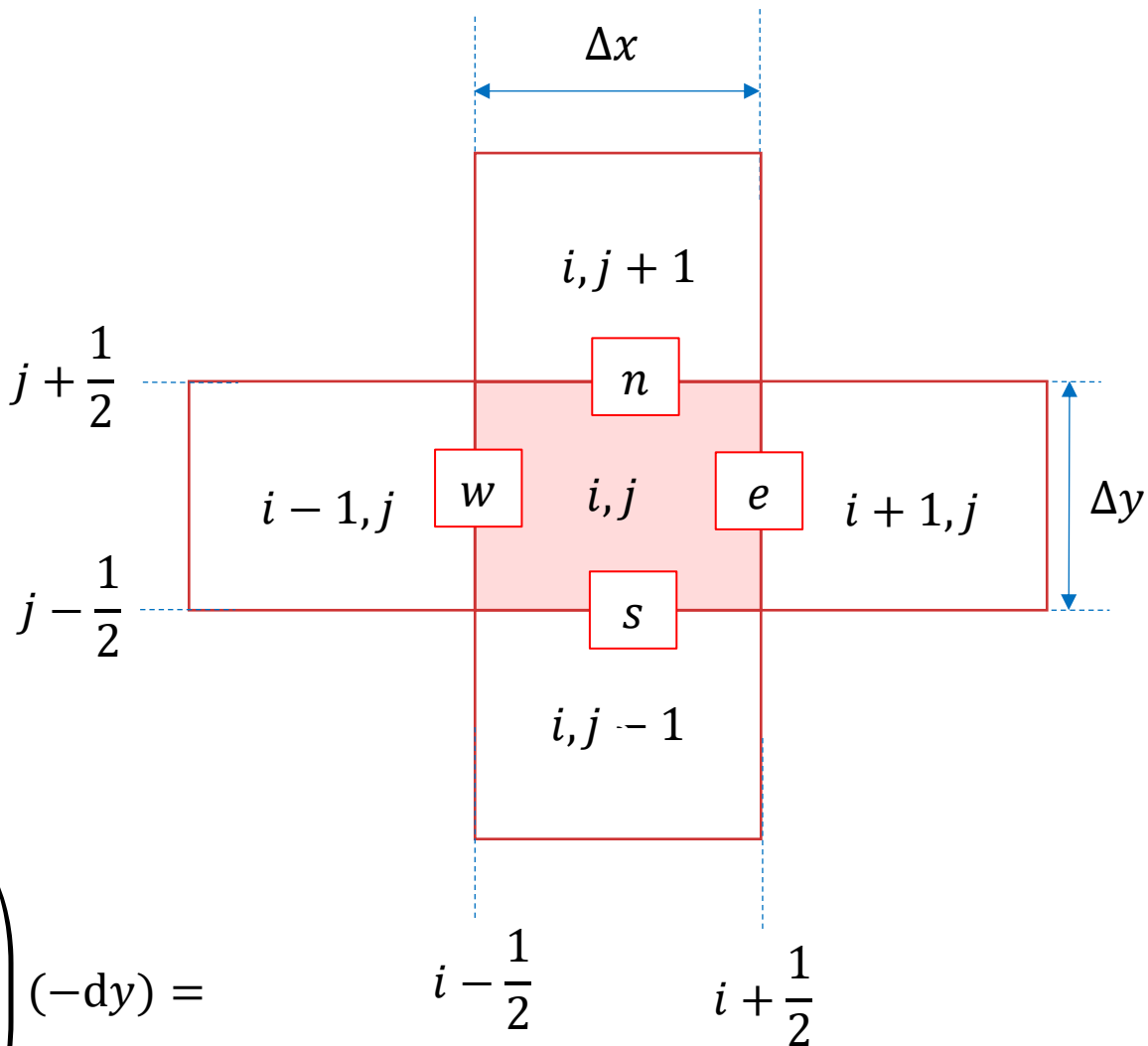
$$\oint_{\partial A_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} \, dl =$$

$$\int_s \left(\nabla \phi \Big|_s \cdot (-\hat{j}) \right) dx + \int_e \left(\nabla \phi \Big|_e \cdot (\hat{i}) \right) dy$$

$$+ \int_n \left(\nabla \phi \Big|_n \cdot (\hat{j}) \right) (-dx) + \int_w \left(\nabla \phi \Big|_w \cdot (-\hat{i}) \right) (-dy) = j + \frac{1}{2}$$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) dx + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_e \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) dy$$

$$+ \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) (-dx) + \int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j-\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_w \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) (-dy) =$$





حجم محدود در مسائل دو بعدی

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) dx + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_e \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) dy + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) (-dx) + \int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j-\frac{1}{2}}} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}_w \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) (-dy) =$$

$$- \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s dx + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e dy + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_n dx - \int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j-\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_w dy$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s : \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_s = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_{j-\frac{1}{2}}} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=x_i} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \Big|_{x=x_i} (x - x_i) + \dots$$

$$\oint_{\partial A_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} \, dl \approx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x=x_i, y=y_{j-\frac{1}{2}}} dx + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{e,c} dy + \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i-\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{n,c} dx - \int_{y_{j+\frac{1}{2}}}^{y_{j-\frac{1}{2}}} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{w,c} dy$$

$$\oint_{\partial A_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} \, dl \approx - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{s,c} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{e,c} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{n,c} \Delta x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{w,c} \Delta y$$





حجم محدود در مسائل دو بعدی

$$\oint_{\partial A_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} \, dl \approx -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{s,c} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{e,c} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{n,c} \Delta x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{w,c} \Delta y$$

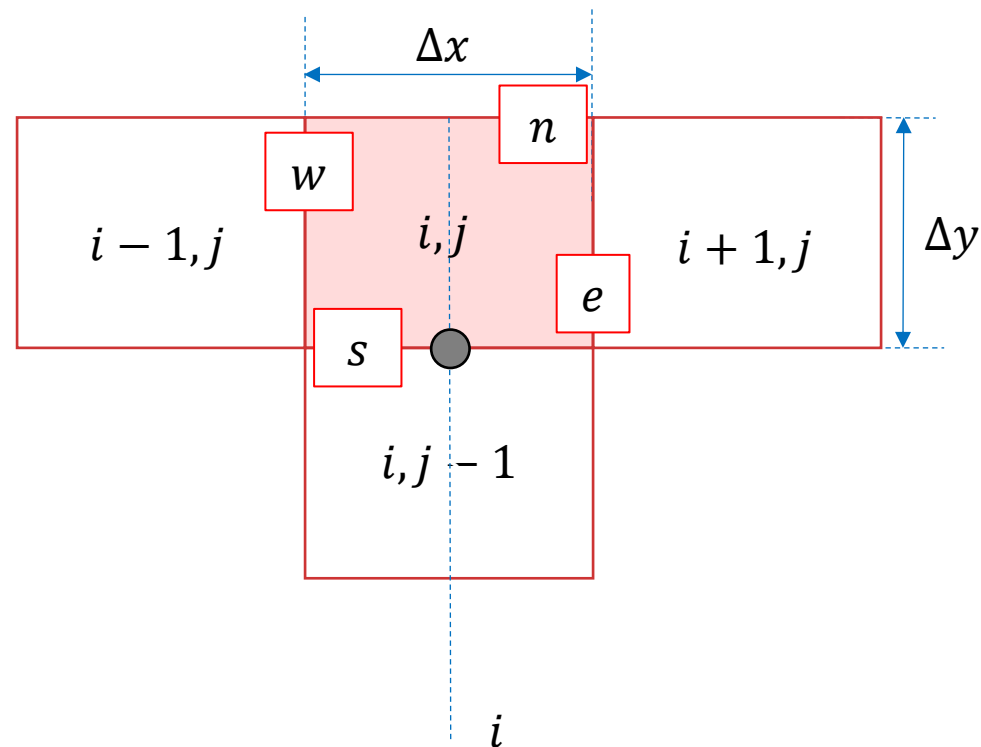
بیان شارها بر حسب مقادیر میانگین حجمی

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{s,c} = \frac{\bar{\phi}_{i,j} - \bar{\phi}_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{e,c} = \frac{\bar{\phi}_{i+1,j} - \bar{\phi}_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{n,c} = \frac{\bar{\phi}_{i,j+1} - \bar{\phi}_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{w,c} = \frac{\bar{\phi}_{i,j} - \bar{\phi}_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$



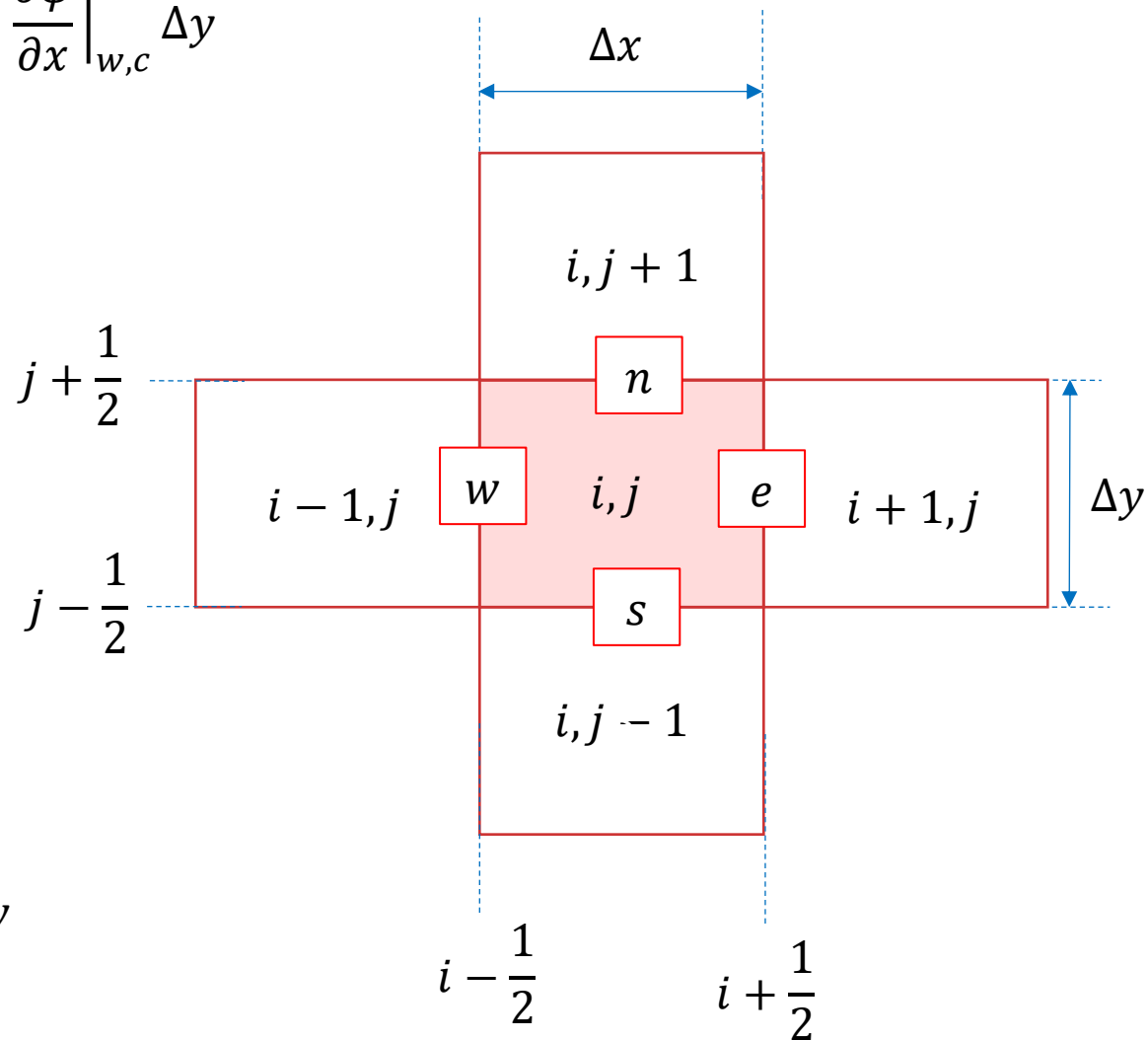


حجم محدود در مسائل دو بعدی

$$\oint_{\partial A_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} \, dl = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{s,c} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{e,c} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{n,c} \Delta x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{w,c} \Delta y$$

$$= -\frac{\bar{\phi}_{i,j} - \bar{\phi}_{i,j-1}}{\Delta y} \Delta x + \frac{\bar{\phi}_{i+1,j} - \bar{\phi}_{i,j}}{\Delta x} \Delta y + \frac{\bar{\phi}_{i,j+1} - \bar{\phi}_{i,j}}{\Delta y} \Delta x - \frac{\bar{\phi}_{i,j} - \bar{\phi}_{i-1,j}}{\Delta x} \Delta y$$

$$= \frac{\bar{\phi}_{i,j-1} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i,j+1}}{\Delta y} \Delta x + \frac{\bar{\phi}_{i-1,j} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i+1,j}}{\Delta x} \Delta y$$





حجم محدود در مسائل دو بعدی

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (-\alpha \nabla \phi) = 0$$

$$\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dA = \frac{\alpha}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dA$$

$$\frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dA = \frac{\partial \bar{\phi}_{i,j}}{\partial t}$$

$$\frac{\alpha}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dA = \frac{\alpha}{A_{i,j}} \oint_{\partial A_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} dl$$

$$A_{i,j} = \Delta x \Delta y$$

$$\frac{d\bar{\phi}_{i,j}}{dt} = \frac{\alpha}{\Delta x \Delta y} \left(\frac{\bar{\phi}_{i,j-1} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i,j+1}}{\Delta y} \Delta x + \frac{\bar{\phi}_{i-1,j} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i+1,j}}{\Delta x} \Delta y \right)$$

$$\frac{d\bar{\phi}_{i,j}}{dt} = \alpha \left(\frac{\bar{\phi}_{i,j-1} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i,j+1}}{\Delta y^2} + \frac{\bar{\phi}_{i-1,j} - 2\bar{\phi}_{i,j} + \bar{\phi}_{i+1,j}}{\Delta x^2} \right)$$

صورت نیمه گسسته





$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\alpha \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\alpha \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (-\alpha \nabla \phi) = 0$$

$$\frac{d\bar{\phi}_{i,j}}{dt} = \frac{\alpha}{V_{i,j,k}} \int_{V_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dV$$

$$\int_{V_{i,j}} (\nabla \cdot (\nabla \phi)) dV = \oint_{\partial V_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} dA$$

$$\frac{d\bar{\phi}_{i,j}}{dt} = \frac{\alpha}{V_{i,j,k}} \oint_{\partial V_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} dA$$



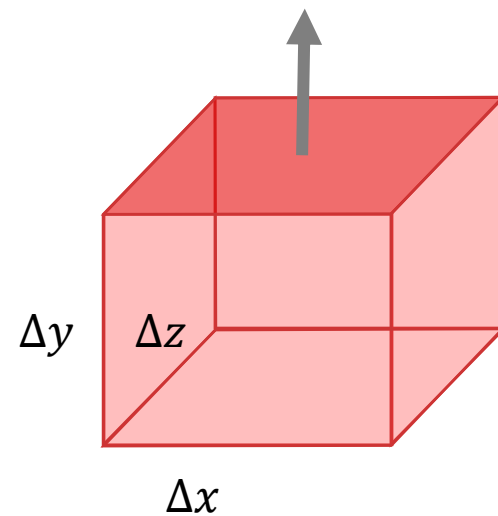


$$\frac{d\bar{\phi}_{i,j}}{dt} = \frac{\alpha}{V_{i,j,k}} \oint_{\partial V_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} dA$$

$$\oint_{\partial V_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} dA = \iint_e \nabla \phi|_e \cdot \hat{i} dydz + \iint_n \nabla \phi|_n \cdot \hat{j} dzdx + \iint_t \nabla \phi|_t \cdot \hat{k} dxdy \\ - \iint_w \nabla \phi|_w \cdot \hat{i} dydz - \iint_s \nabla \phi|_s \cdot \hat{j} dzdx - \iint_b \nabla \phi|_b \cdot \hat{k} dxdy$$

$$\iint_n \nabla \phi|_n \cdot \hat{j} dzdx = \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial y} dzdx \approx \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{n,c} \Delta z \Delta x$$

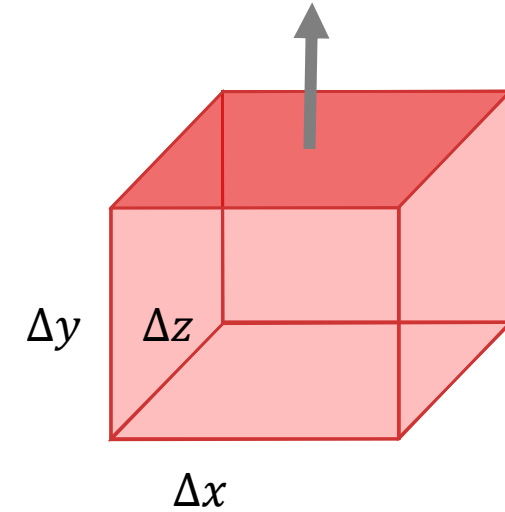
$$\iint_n \nabla \phi|_b \cdot \hat{j} dzdx = \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \phi}{\partial y} dzdx \approx \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{b,c} \Delta z \Delta x$$





$$\frac{d\bar{\phi}_{i,j}}{dt} = \frac{\alpha}{V_{i,j,k}} \oint_{\partial V_{i,j}} \nabla \phi \cdot \hat{n} dA$$

$$\iint_n \nabla \phi \big|_n \cdot \hat{j} dz dx = \frac{\bar{\phi}_{i,j+1,k} - \bar{\phi}_{i,j,k}}{\Delta y} \Delta z \Delta x$$



$$\frac{d\bar{\phi}_{i,j}}{dt} = \alpha \left(\frac{\bar{\phi}_{i-1,j,k} - 2\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\bar{\phi}_{i,j-1,k} - 2\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \frac{\bar{\phi}_{i,j,k-1} - 2\bar{\phi}_{i,j,k} + \bar{\phi}_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} \right)$$



ریاضیات المان محدود





خلاصه‌ای از ریاضیات المان محدود

بر اساس فرم ضعیف معادلات دیفرانسیل جزئی

فرم ضعیف (ضرب فرم قوی در تابع آزمون)

مثال فرم قوی

$$-\int_a^b \frac{d^2 u}{dx^2} v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx$$
$$-\int_a^b \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \left[\frac{du}{dx} v \right]_a^b = \int_a^b f(x) v(x) dx$$

ضرب فرم قوی در تابع آزمون

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$$

$$u(a) = u_a$$
$$u(b) = u_b$$

فرم ضعیف منجر به سیستمی از معادلات جبری شده که می‌تواند به صورت عددی حل شود.

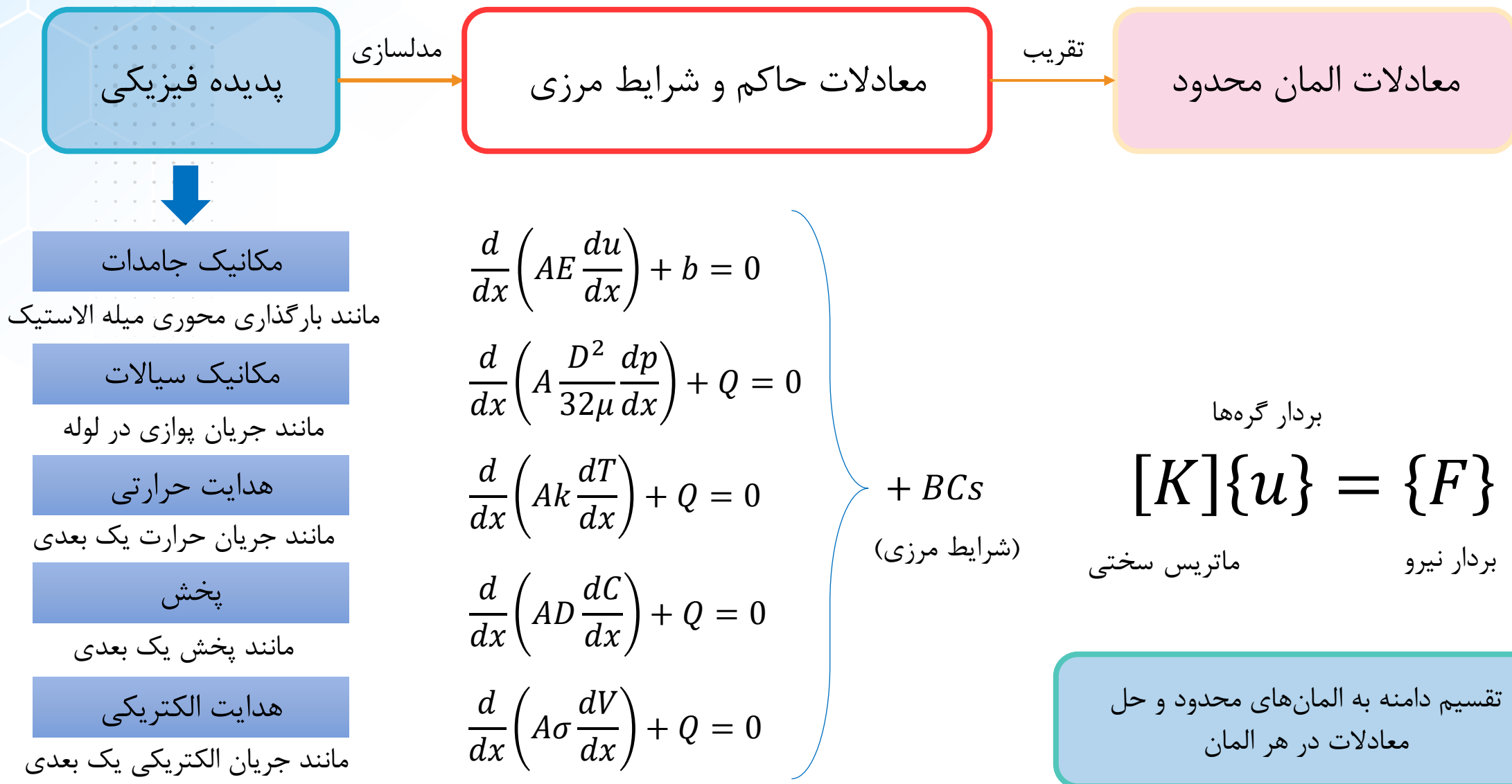
□ تفاضل محدود مستقیم فرم قوی معادلات دیفرانسیل جزئی را حل می‌کند.

□ حجم محدود بر اساس معادلات انتگرالی پایستار است.





خلاصه‌ای از ریاضیات المان محدود



خسته نباشید
