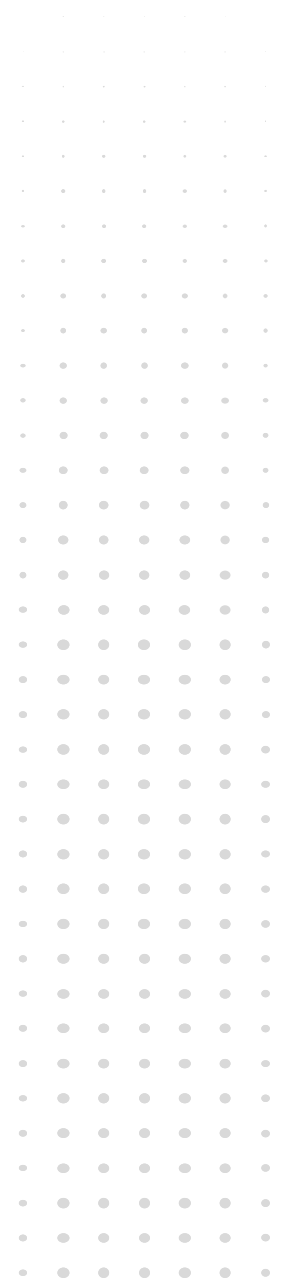


دینامیک سیالات محاسباتی

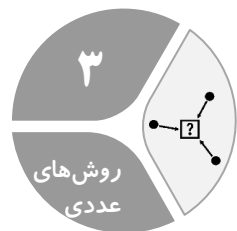
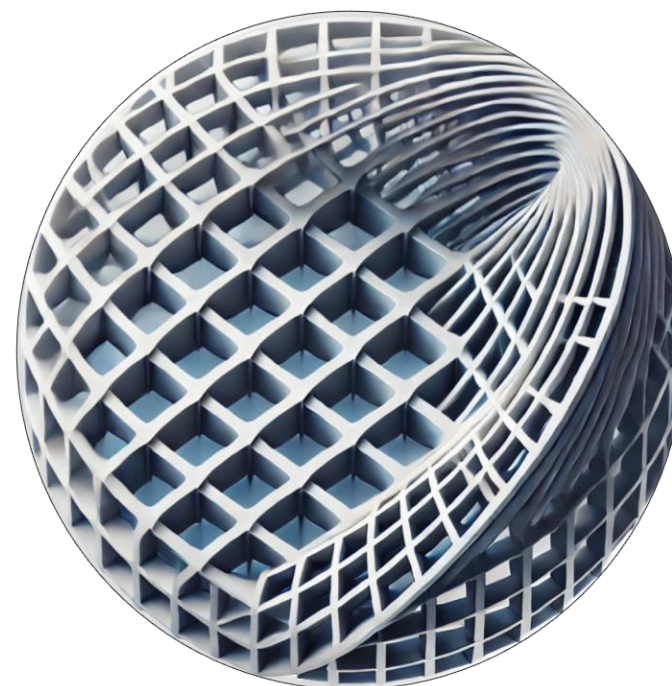


محمدصادق کریمی



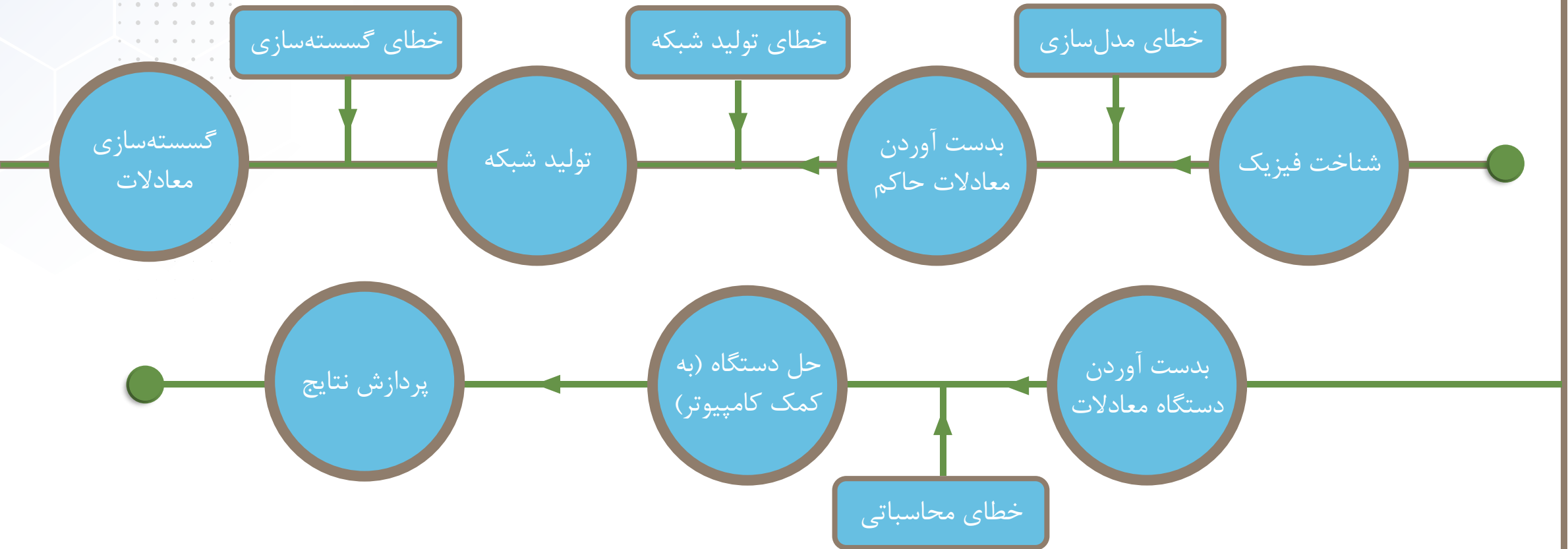
۲

شبکه‌بندی و گستره‌سازی





نقش شبکه‌بندی در حل عددی



- جهت حل معادلات گستره‌سازی شده به روش عددی دامنه را باید شبکه‌بندی کرد.
- شبکه‌بندی مناسب خطای گستره‌سازی معادلات را کاهش می‌دهد.
- اهداف : معرفی روند شبکه‌بندی، انواع شبکه‌بندی‌ها و المان‌ها ، ارزیابی کیفیت و استقلال از شبکه





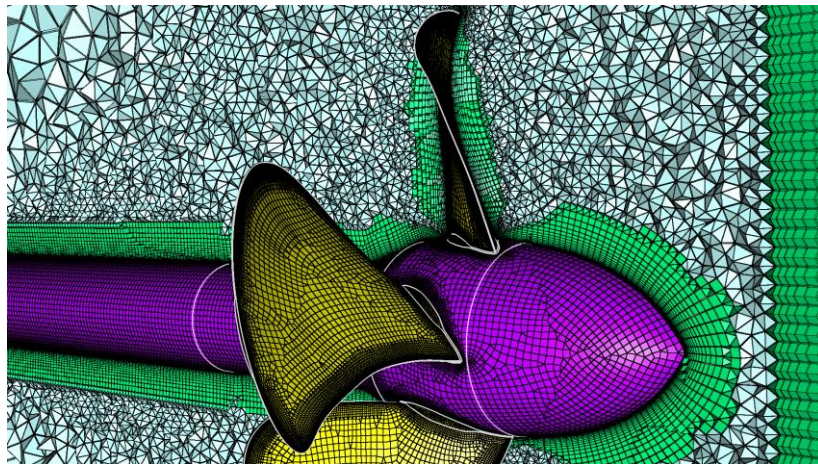
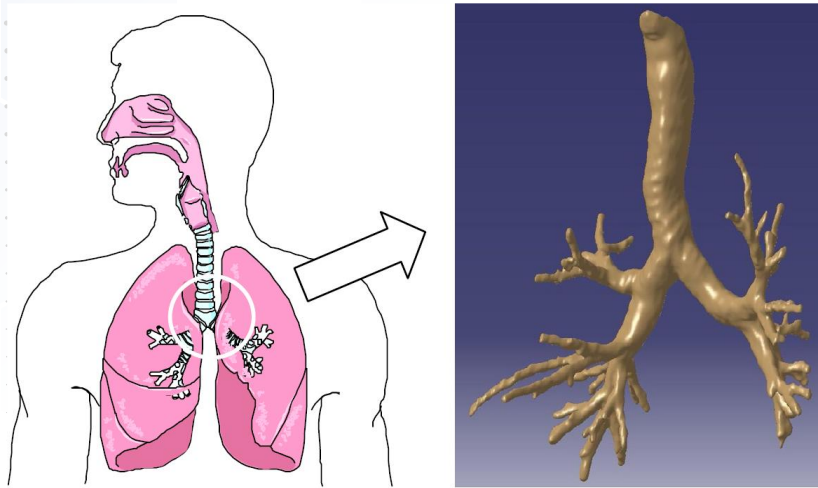
شبکه‌بندی

مدل‌سازی هندسه

- ❖ طراحی به کمک کامپیوتر (CAD)
- ❖ طراحی هندسی گاه به کمک ابزارهای مختلف اندازه‌گیری مانند تصویربرداری، اندازه‌گیری و اسکن سه بعدی
- ❖ پیاده‌سازی به کمک نرم افزارها مانند SolidWorks، Catia، SpaceClaim، BladeGen

بخش‌بندی میدان

- جداسازی دامنه حل به بخش‌های کوچک محدود (نه لزوماً کم)
- تولید شبکه محاسباتی (Mesh generation)
- بررسی استقلال از شبکه (سازگاری)
- روش‌های متعدد ریاضی
- توسعه کافی نرم‌افزارها مانند ICEM CFD، Turbogrid و Fluent Meshing





شبکه‌بندی بر اساس المان‌ها

انواع المان‌ها

بسته به نوع تجزیه و تحلیل و نیازهای حل‌کننده، شبکه‌های تولیدشده می‌توانند دو بعدی (۲ بعدی) یا سه بعدی (۳ بعدی) باشند.

دو بعدی

مستطیل

مثلث

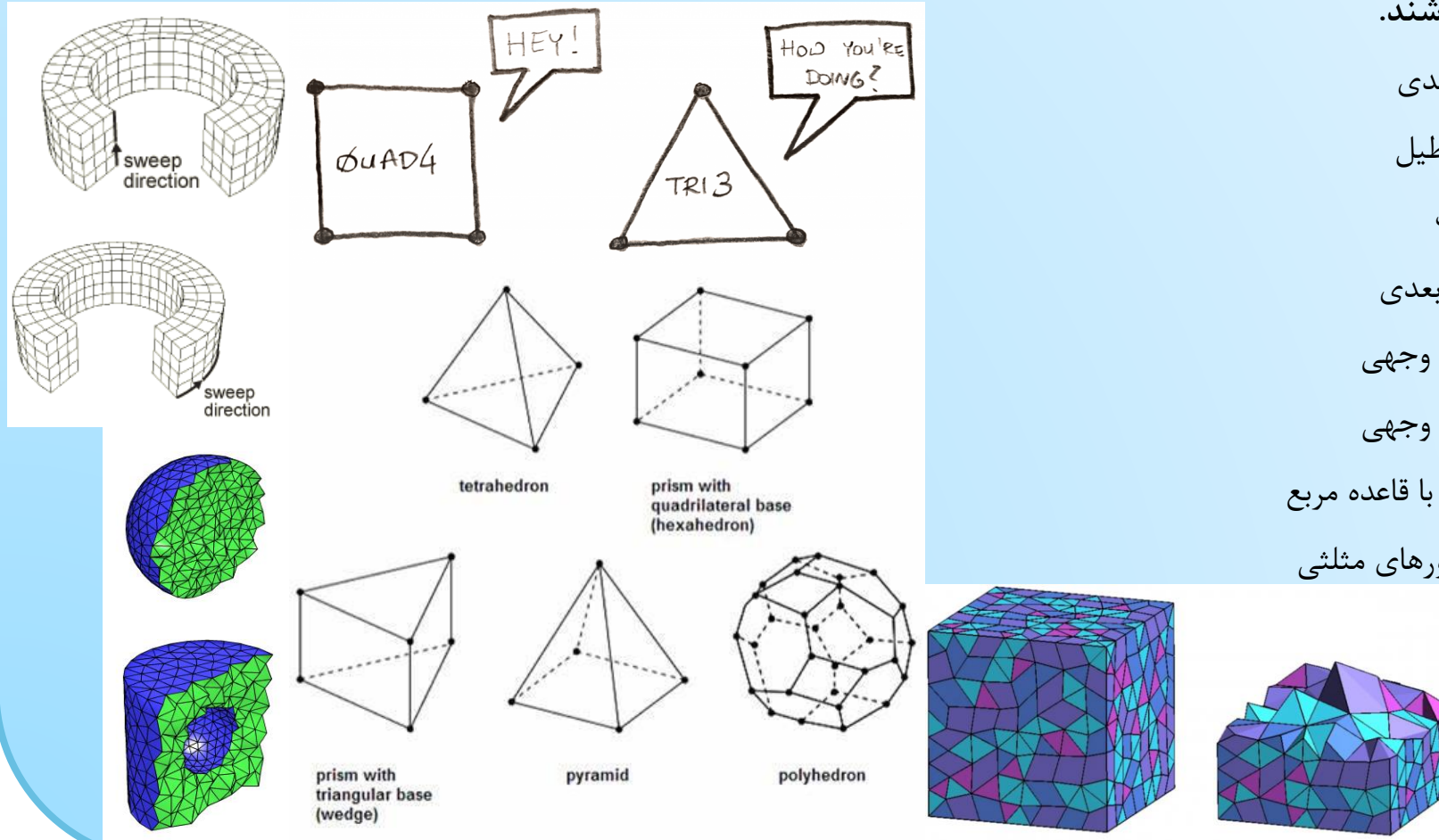
سه بعدی

شش وجهی

چهار وجهی

مربع با قاعده مربع

منشورهای مثلثی





شبکه‌بندی بر اساس نوع اتصال

ساختاریافته

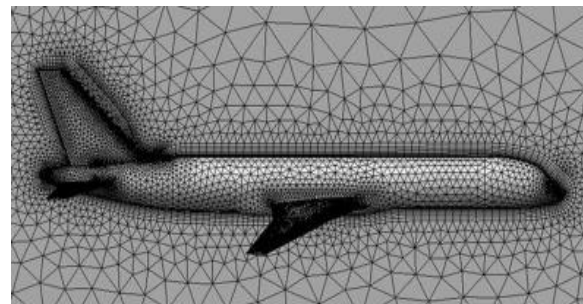
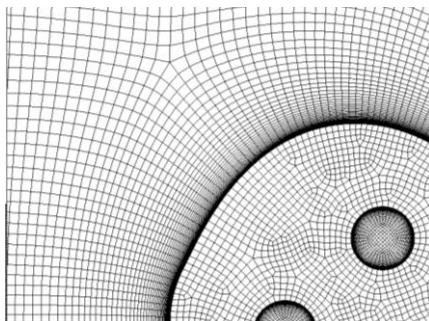
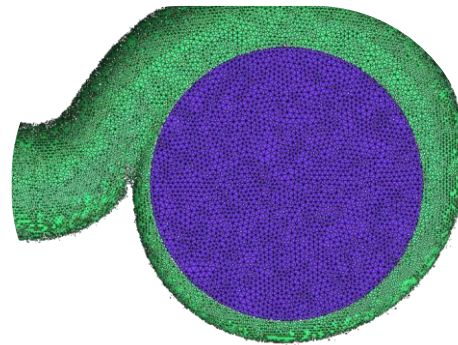
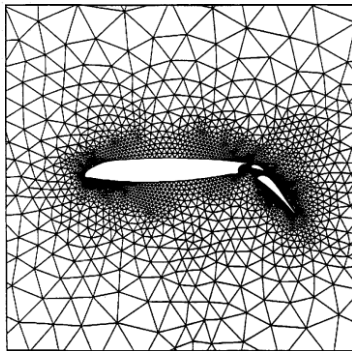
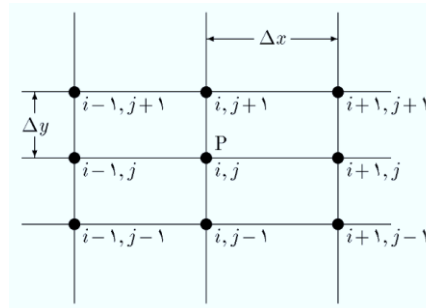
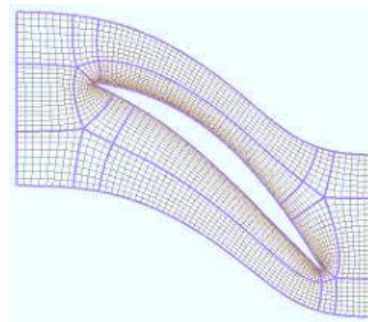
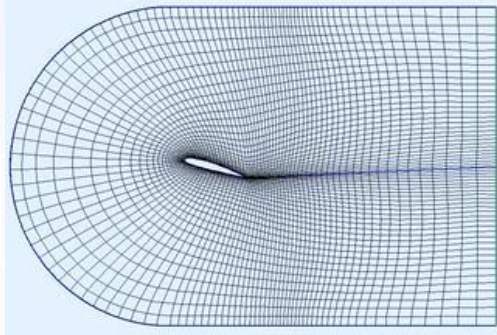
- ❖ تراز شبکه و اتصال منظم
- ❖ عدم نیاز به ذخیره‌سازی شماره همسایه هر سلول
- ❖ دارای دقت و کارایی محاسباتی
- ❖ سازگاری ضعیف با هندسه‌های پیچیده
- ❖ هزینه محاسباتی بالا برای شبکه‌بندی

ساختارنیافته

- اتصال نامنظم
- ضرورت ذخیره‌سازی آرایش سلول‌ها
- هزینه محاسباتی بالا برای شبیه‌سازی
- انعطاف‌پذیری برای هندسه‌های پیچیده
- کارایی محاسباتی برای شبکه‌بندی

دو گانه (هیبرید)

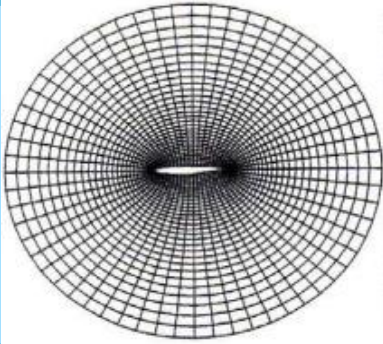
- ☐ ترکیب دو شبکه ساختاریافته و ساختارنیافته
- ☐ دقت و کارایی محاسباتی نزدیک دیواره
- ☐ هزینه محاسباتی بهینه شبکه‌بندی وسط دامنه





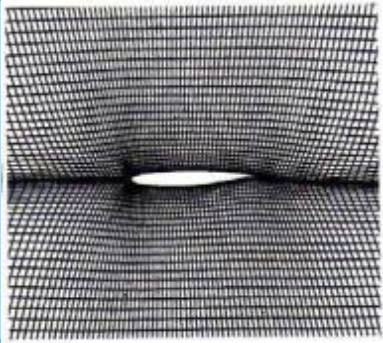
الگوهای متداول شبکه‌های ساختاریافته

شبکه O



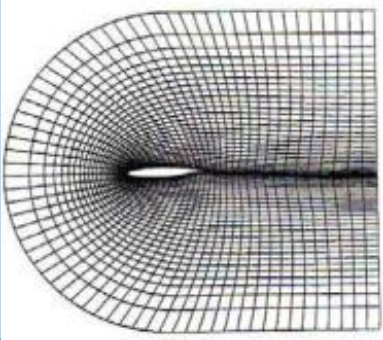
- ❑ برای هندسه‌های دایره‌ای یا بیضی مانند لوله‌ها، ایرفویل‌ها یا پره‌های توربین.
- ✓ کاهش Skewness و بهبود Orthogonality اطراف اجسام دایره‌ای.
- ✓ لایه‌های مرزی را در حوزه‌های استوانه‌ای به خوبی جذب می‌کند.
- ❖ اعمال آن در هندسه‌هایی با لبه‌های تیز یا اجسام متعدد دشوار است.

شبکه H



- ❑ برای هندسه‌های نسبتاً ساده مانند حوزه‌های مستطیلی یا بلوکی.
- ✓ ساده برای تولید.
- ✓ برای دامنه‌هایی با مرزهای مسطح موثر است.
- ❖ برای ثبت سطوح منحنی یا هندسه‌های پیچیده ایده آل نیست.

شبکه C



- ❑ معمولاً برای ایرفویل‌ها و سایر هندسه‌های کشیده استفاده می‌شود.
- ✓ در حل مناطق Wake پشت اشیاء موثر است.
- ✓ وضوح خوبی در نزدیکی لبه انتهایی (Trailing Edge) ایرفویل ارائه می‌دهد.
- ❖ ممکن است برای شرایط مرزی به تنظیمات خاصی در سمت باز نیاز داشته باشد.



Vertex انواع

رأس : نقطه‌ای در فضا که خطوط شبکه در آن قطع می‌شوند. رئوس برای تعریف شکل هندسی و توپولوژی المان شبکه، مانند سلول‌ها یا صفحه‌ها استفاده می‌شود.

END(E) ☐

- زاویه بین ۰ تا ۱۳۵
- اتصال خط شبکه: صفر

Side(S) ☐

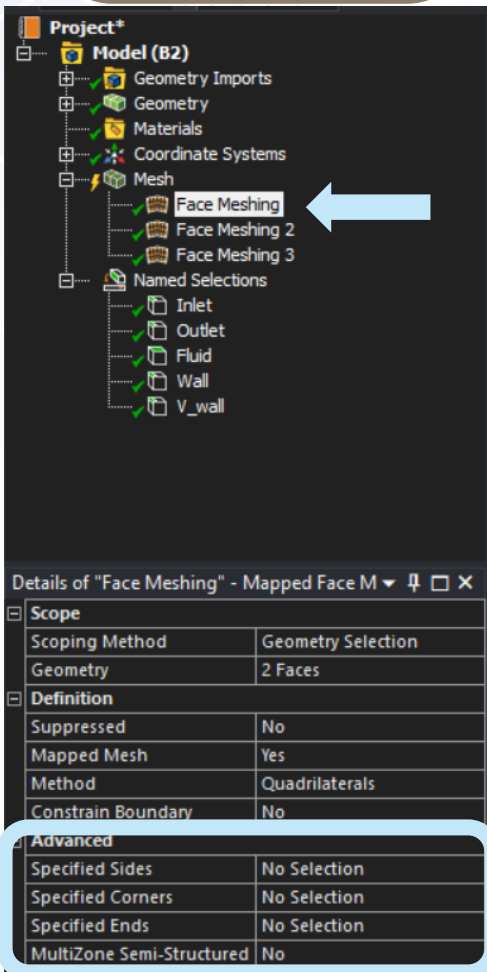
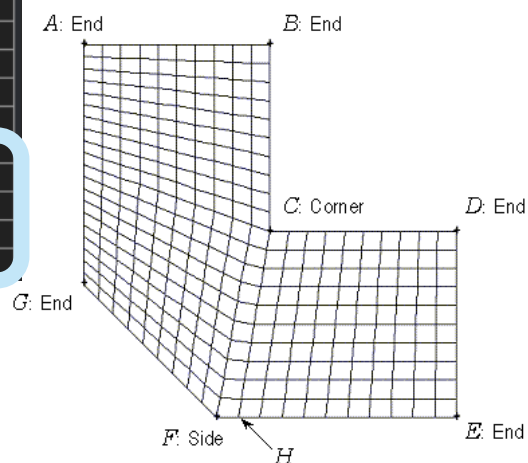
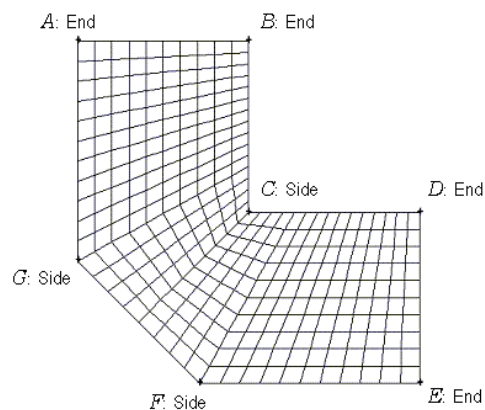
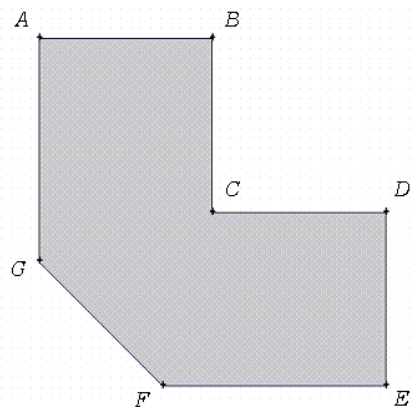
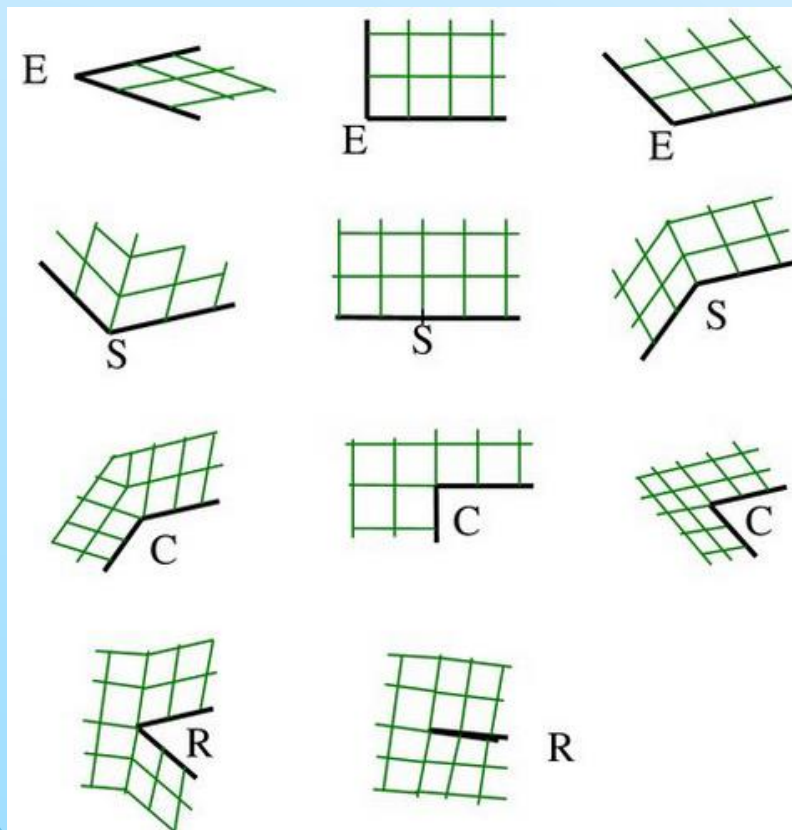
- زاویه بین ۱۳۵ تا ۲۲۴
- اتصال خط شبکه: یک

Corner(C) ☐

- زاویه بین ۲۲۵ تا ۳۱۴
- اتصال خط شبکه: دو

Reverse(R) ☐

- زاویه بین ۳۱۵ تا ۳۶۰
- اتصال خط شبکه: سه





انواع شبکه‌بندی چهارضلعی

طرح ساختاریافته

$$4 * End + N * Side$$

طرح ساختاریافته متناوب

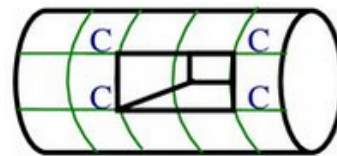
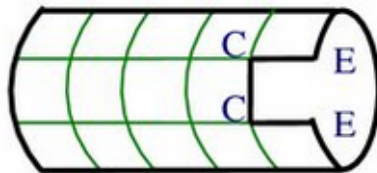
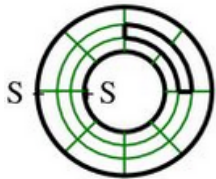
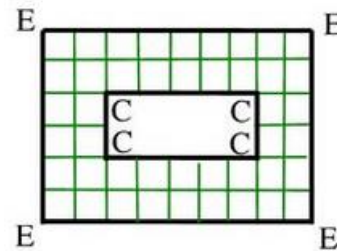
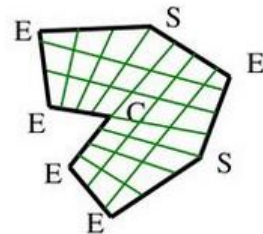
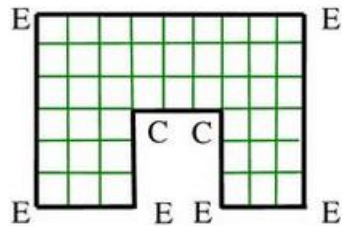
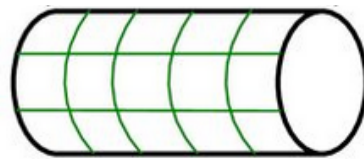
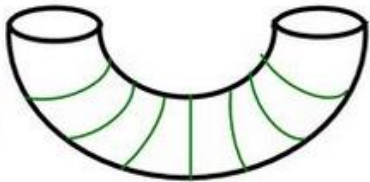
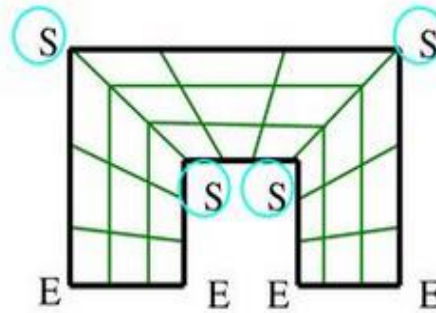
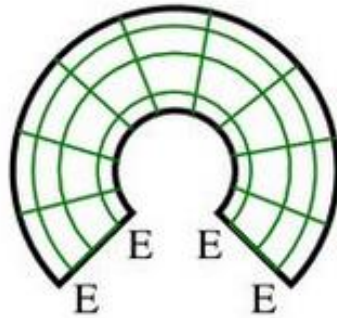
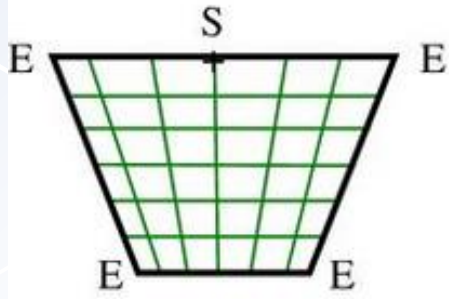
$$N * Side$$

طرح زیر ساختاریافته

$$4 * End + L * Side + M * (End + Corner) + N * (2 * End + Reverse)$$

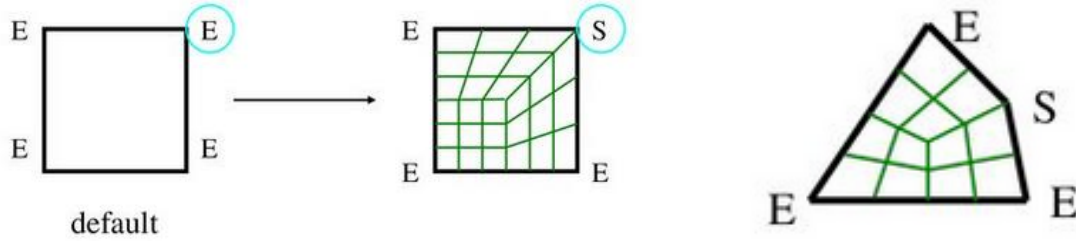
طرح زیر ساختاریافته متناوب

$$N * Side + M * (End + Corner) \quad M > 2$$





انواع شبکه‌بندی چهارضلعی و هبیرید (چهار - سه ضلعی)



طرح اصلی مثلثی

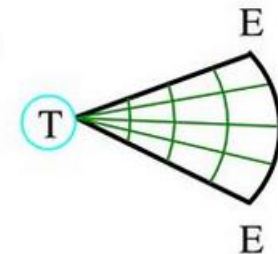
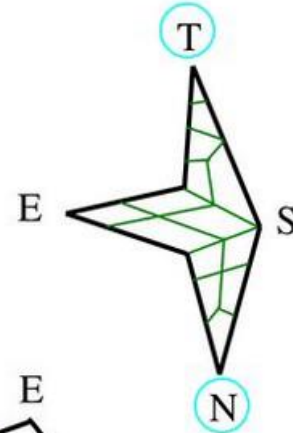
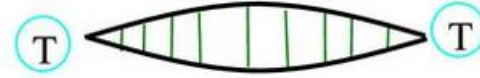
$$3 * End + N * Side$$

چهار - سه ضلعی

❖ مثلثی : $2 * Triangle$

❖ Pave

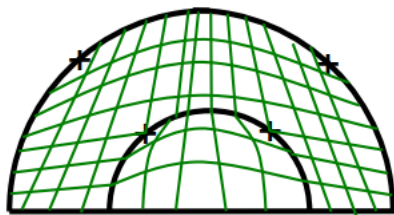
❖ Wedge : برای ساخت شبکه استوانه‌ای و قطبی



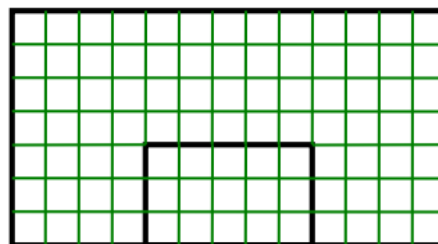
شبکه‌ها در دامنه محاسباتی و دامنه فیزیکی



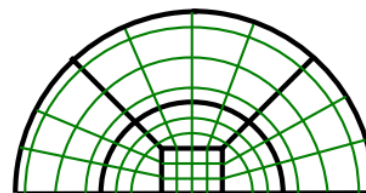
Single-block geometry



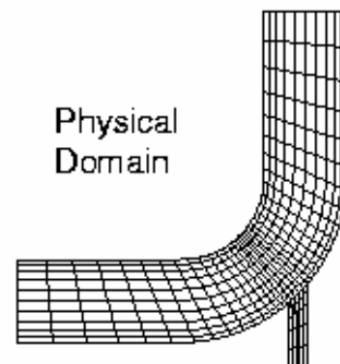
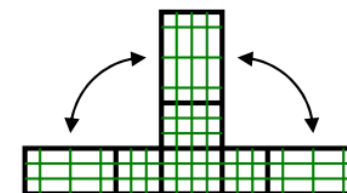
Logical representation.



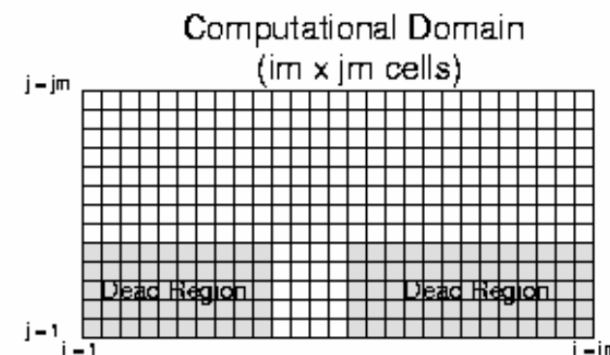
Multi-block geometry



Logical representation.



Physical Domain





کیفیت شبکه

Aspect ratio

❑ نسبت بلندترین طول یک سلول به کوتاه‌ترین طول است. مقدار ایده آل ۱ است.

❑ نسبت ابعاد سلول شش وجهی: نسبت حداکثر طول لبه به حداقل طول لبه.

$$AspectRatio = \frac{\max(x_1, x_2, \dots, x_{12})}{\min(x_1, x_2, \dots, x_{12})}$$

❑ نسبت ابعاد سلول چهاروجهی: بین حداکثر طول لبه و شعاع کره داخلی سلول در ارتباط است.

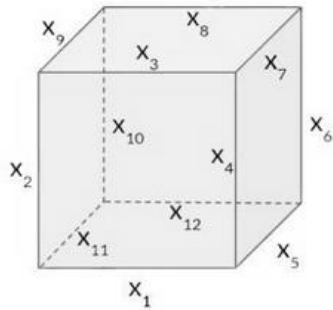
$$AspectRatio = \frac{\max(x_1, x_2, \dots, x_6)}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot r}$$

Non-Orthogonality

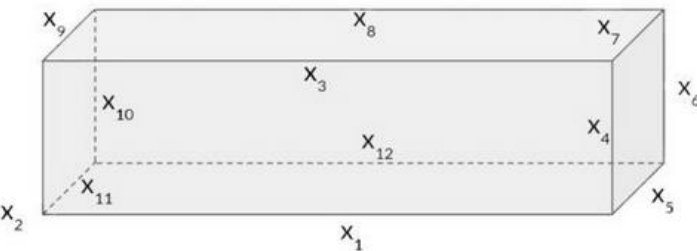
❑ زاویه بین بردار متصل کننده دو مرکز سلول مجاور و بردار عمود صفحه مشترک بین این سلول‌ها است. محدوده غیرمتعامد بودن بین ۰ (ایده آل) و ۹۰ (بدترین) است.

❑ توصیه می‌شود زیر ۷۰ نگه داشته شود.

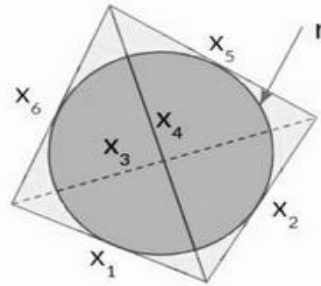
Hexahedral cell with aspect ratio of 1



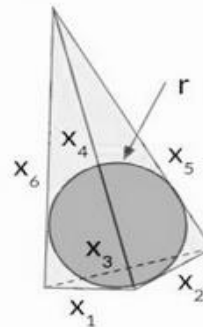
Hexahedral cell with aspect ratio of 4



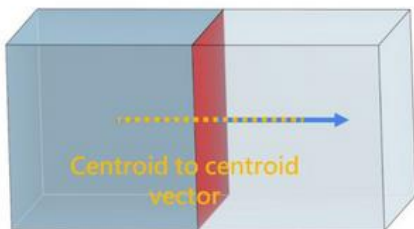
Tetrahedral cell with aspect ratio of 1



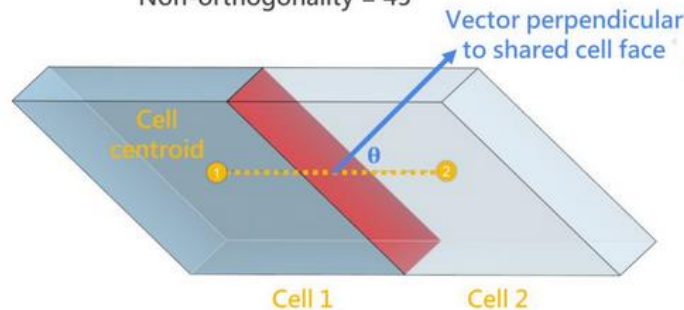
Tetrahedral cell with aspect ratio of 4



Non-orthogonality = 0

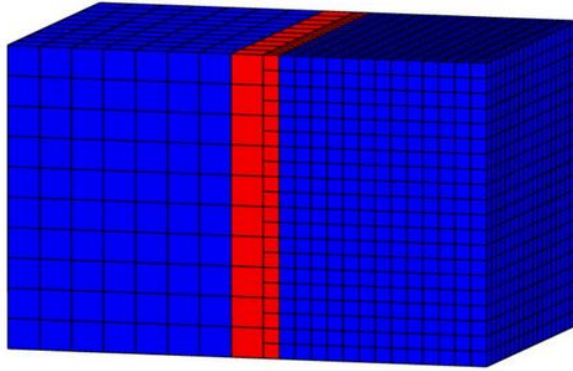
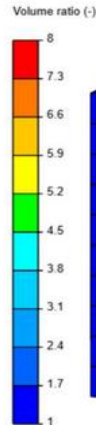
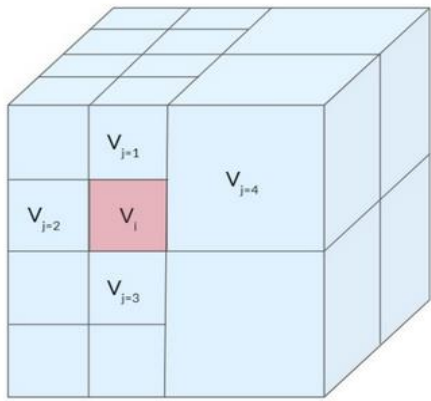


Non-orthogonality = 45

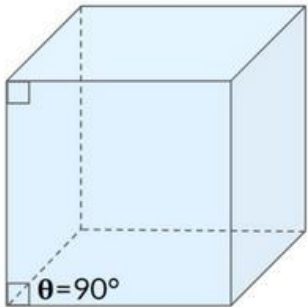




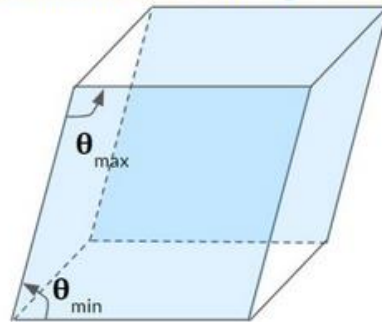
کیفیت شبکه



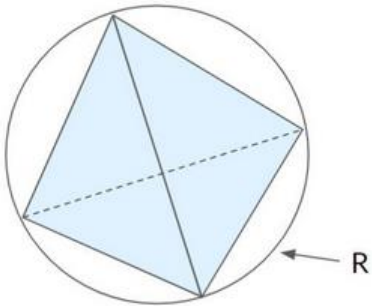
Hexahedral cell with skewness of 0



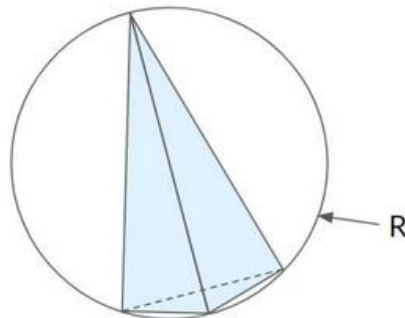
Hexahedral cell with high skewness



Tetrahedral cell with skewness of 0



Tetrahedral cell with high skewness



Volume Ratio

نسبت حجم سلول‌های مجاور است.

$$VolumeRatio = \frac{\max(V_1, V_2)}{\min(V_1, V_2)}$$

Skewness(Hexahedral)

انحراف بین زوایای رأس جفت صورت یک شش وجهی و زاویه رأس ایده آل ۹۰ درجه را اندازه‌گیری می‌کند.

$$Skewness = \max\left(\frac{\theta_{max} - 90}{180 - 90}, \frac{90 - \theta_{max}}{90}\right)$$

Skewness(Tetrahedral)

نسبت انحراف بین حجم ایده آل و حجم سلول به حجم ایده آل.

$$V_{ideal} = \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot R^3}{27}$$

بین حداکثر طول لبه و شعاع کره خارجی سلول مرتبط است.

$$Skewness = \frac{V_{ideal} - V_{cell}}{V_{ideal}}$$





ارزیابی کیفیت

❑ کاربر خود نیز باید با توجه به حساسیت و هدف مسئله کیفیت مورد نظر را پیدا کند.

Skewness	Total Quality	Orthogonality	How?!
$0.9 - 1 <$	$0 - 0.4$	$0 - 0.4$	Bad
$0.75 - 0.9$	$0.4 - 0.7$	$0.4 - 0.7$	Poor
$0.5 - 0.75$	$0.7 - 0.8$	$0.7 - 0.8$	Fair
$0.25 - 0.5$	$0.8 - 0.9$	$0.8 - 0.9$	Good
$>0 - 0.25$	$0.9 - 1$	$0.9 - 1$	Excellent

❑ کاربر با آزمایش‌های تجربی، تئوری پدیده‌ها و یا شبیه‌سازی‌های دقت پایین می‌تواند نقاط با

گرادیان بالای متغیرها را شناسایی کند و کیفیت شبکه را در آن نقاط بالا ببرد.

❑ کیفیت پایین شبکه، سلول‌های بسیار کشیده با زوایای بسیار تند گرادیان بالا را به خوبی ضبط

نمی‌کنند و باعث بوجود آمدن خطای عددی زیاد در حل می‌شوند.





استقلال از شبکه

- هدف: اطمینان جهت اینکه نتایج شبیه‌سازی به طور قابل توجهی تحت تأثیر وضوح شبکه قرار نمی‌گیرند.
- راهکار: آیا حل با بهبود شبکه به مقدار خاصی همگرا می‌شود؟

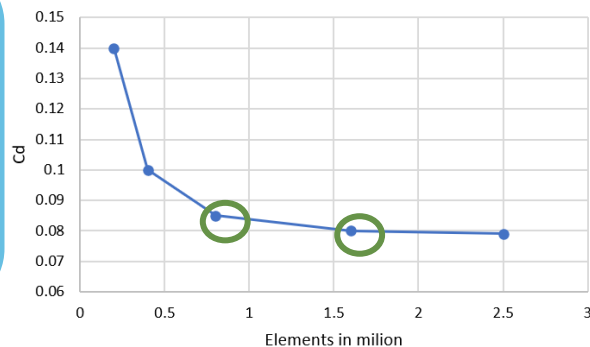
۴. تعیین استقلال

- ❑ هنگامی که تغییرات در متغیرهای کلیدی بین بهبودهای متوالی شبکه ناچیز می‌شود، حل را می‌توان مستقل از شبکه در نظر گرفت.
- ❑ یک معیار استقلال از شبکه معیار Roach است که با معادلات استقلال از شبکه را به صورت کمی بررسی می‌کند.

۵. انتخاب شبکه بهینه

- ❑ درشت‌ترین شبکه را انتخاب کنید که نتایج مستقل از شبکه ارائه می‌دهد تا هزینه محاسباتی را با حفظ دقت به حداقل برساند.

- ❑ شبکه سوم دقت قابل قبول و هزینه پایین
- ❑ شبکه چهارم دقت بالا و هزینه بالا
- ❑ کاربر نسبت به شرایط یکی از شبکه‌ها را انتخاب می‌کند.



۱. راه‌اندازی اولیه شبکه

- ❑ با یک مش درشت شروع کنید و شبیه‌سازی را اجرا کنید.
- ❑ مناطق بحرانی مانند لایه‌های مرزی و مناطق با گرادیان بالا که در آنها ممکن است نیاز به اصلاح شبکه باشد، را شناسایی کنید.

۲. بهبود شبکه

- ❑ به تدریج وضوح مش را افزایش دهید، به ویژه در مناطق مورد علاقه.
- ❑ از بهبود موضعی در مناطق با گرادیان بالا استفاده کنید، در حالی که شبکه را در مناطقی با حداقل تغییرات جریان درشت نگه دارید.

۳. نظارت همگرایی حل

- ❑ ردیابی متغیرهای کلیدی مانند ضریب لیفت، ضریب درگ و افت فشار برای هر سطح بهبود شبکه.
- ❑ این متغیرها را بر اساس تعداد المان‌ها یا گره‌های شبکه ترسیم کنید.





صحت‌سنجی ریچار دسون

۱. تعیین ارتفاع معیار h

□ اگر در کل شبکه طول اضلاع ثابت است، همان طول به‌عنوان طول معیار در نظر گرفته شود.

□ اگر طول اضلاع شبکه‌ها متفاوت است:

$$h = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta V_i) \right]^{\frac{1}{3}} \quad \blacklozenge \text{ سه بعدی:}$$

$$h = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta A_i) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \blacklozenge \text{ دو بعدی:}$$

۲. انتخاب ۳ نوع شبکه

❖ شبیه‌سازی با ۳ نوع شبکه متفاوت و استخراج متغیر ϕ در ۳ حالت

❖ فاکتور r به‌عنوان نسبت اصلاح شبکه تعریف می‌شود.

$$r = \frac{h_{coarse}}{h_{fine}} > 1 \quad r_{32}, r_{21}$$

❖ این فاکتور بهتر است بیش‌تر از $1/3$ باشد.

۳. محاسبه مقیاس همگرایی p

$$p = \frac{1}{\ln(r_{21})} \left| \ln \left| \frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{21}} \right| + q(p) \right|$$

$$q(p) = \ln \left(\frac{r_{21}^p - s}{r_{32}^p - s} \right) \quad s = 1. \operatorname{sgn} \left(\frac{\epsilon_{32}}{\epsilon_{21}} \right)$$

۴. محاسبه مقدار برون‌یابی شده

$$\phi_{ext}^{21} = \frac{(r_{21}^p \phi_1 - \phi_2)}{(r_{21}^p - 1)}$$

۵. محاسبه خطاها

$$e_a^{21} = \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1} \right| \quad \checkmark \text{ خطای نسبی تقریبی:}$$

$$e_{ext}^{21} = \left| \frac{\phi_{ext}^{12} - \phi_1}{\phi_{ext}^{12}} \right| \quad \checkmark \text{ خطای نسبی برون‌یابی:}$$

$$GCI_{fine}^{21} = \frac{1.25 e_a^{21}}{r_{21}^p - 1} \quad \checkmark \text{ شاخص همگرایی شبکه ریز:}$$





مثال صحت‌سنجی ریچاردسون

GCI*: عدم قطعیت را به صورت عددی اندازه‌گیری می‌کند.

تخمین عدم قطعیت عددی: تخمینی از فاصله‌ی راه‌حل محاسبه‌شده با جواب دقیق به دلیل خطاهای گسسته‌سازی ارائه می‌دهد.

	ϕ =dimensionless reattachment length (with monotonic convergence)	ϕ =axial velocity at $x/H=8, y=0.0526$ ($p < 1$)	ϕ =axial velocity at $x/H=8, y=0.0526$ (with oscillatory convergence)
N_1, N_2, N_3	18,000, 8000, 4500	18,000, 4500, 980	18,000, 4500, 980
r_{21}	1.5	2.0	2.0
r_{32}	1.333	2.143	2.143
ϕ_1	6.063	10.7880	6.0042
ϕ_2	5.972	10.7250	5.9624
ϕ_3	5.863	10.6050	6.0909
p	1.53	0.75	1.51
ϕ_{ext}^{21}	6.1685	10.8801	6.0269
e_a^{21}	1.5%	0.6%	0.7%
e_{ext}^{21}	1.7%	0.9%	0.4%
GCI_{fine}^{21}	2.2%	1.1%	0.5%

*:Grid Convergence Index





روش‌های گستره‌سازی

تفاضل محدود

- ✓ نوشتن معادلات در صورت دیفرانسیلی
- ✓ نقطه‌بندی میدان
- ✓ جایگذاری مشتقات جزئی با تقریب‌هایی بر حسب مقادیر تابع هدف در نقاط مورد نظر
- ✓ یک معادله جبری در هر نقطه و یک دستگاه معادلات خطی

حجم محدود

- ✓ نوشتن معادلات در صورت انتگرالی
- ✓ تقسیم میدان حل به حجم‌های کنترلی همجوار
- ✓ نوشتن قوانین بقا برای هر حجم کنترلی
- ✓ نقاط محاسباتی مرکز حجم کنترل‌ها هستند

المان محدود

- ✓ پیش‌زمینه ریاضی قوی
- ✓ تا حدودی مشابه حجم محدود
- ✓ استفاده از توابع وزنی برای معادلات پیش از انتگرال‌گیری در کل دامنه
- ✓ پرکاربرد در جامدات به علت تقریب‌هایی در مسائل ساده (مثل المان‌های یک بعدی و دو بعدی)





حلگر

تفاضل محدود

- ✓ مش ساختاریافته
- ✓ حلگرهای محدود خانگی
- ✓ نیاز به تبدیل شبکه‌بندی

حجم محدود

- ✓ بر روی هر نوع شبکه‌بندی قابل اعمال است
- ✓ برای هندسه‌های پیچیده مناسب است
- ✓ پایه بسیاری از کدهای تجاری است: Ansys Fluent, CFX, OpenFoam, StarCCM+

المان محدود

- ✓ پرکاربرد در نرم‌افزارهای جامداتی
- ✓ تعداد محدودی حلگر تجاری CFD بر این پایه توسعه داده شده است: Comsol Multiphysics
- ✓ برای مسائل کنش سیالات و جامدات مناسب است



خسته نباشید
