

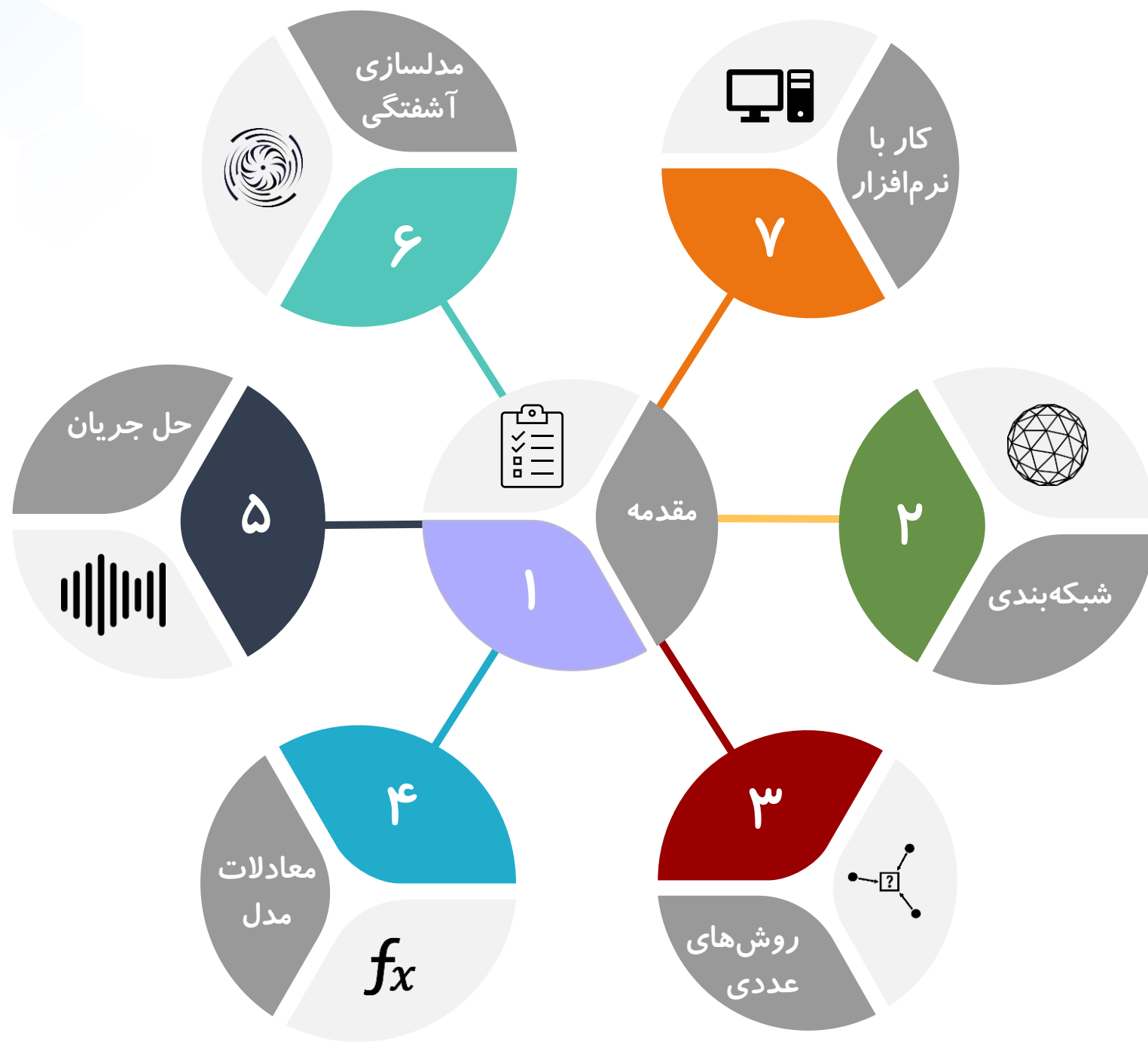
دینامیک سیالات محاسباتی



محمدصادق کریمی

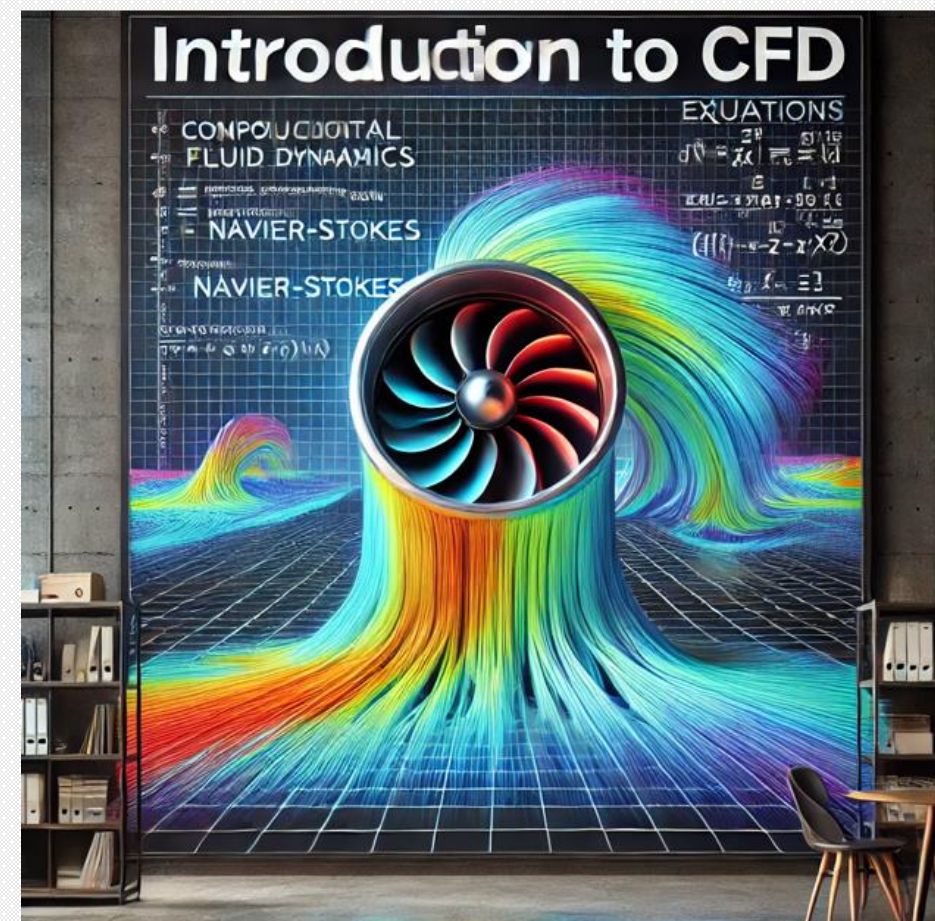
پاییز ۱۴۰۱

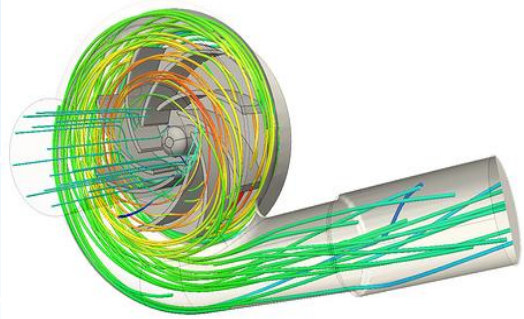




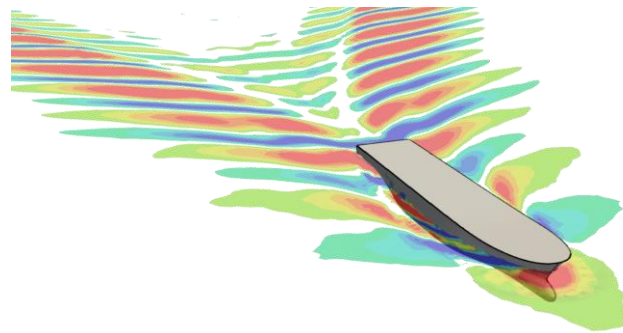


مقدمه ۱

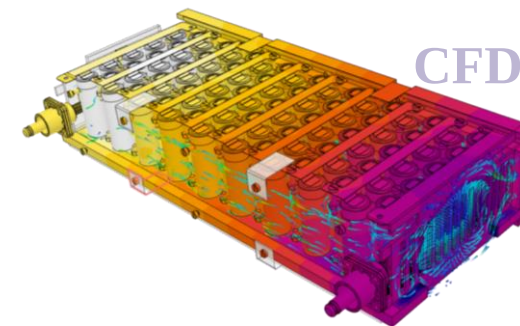




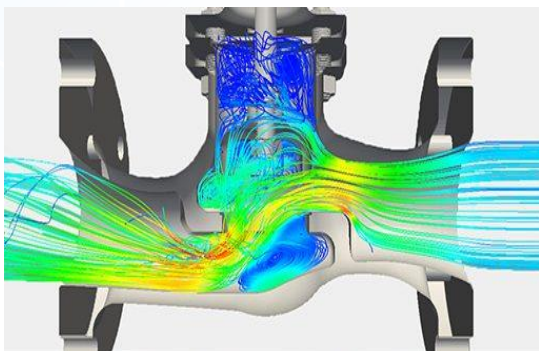
Turbomachinery CFD



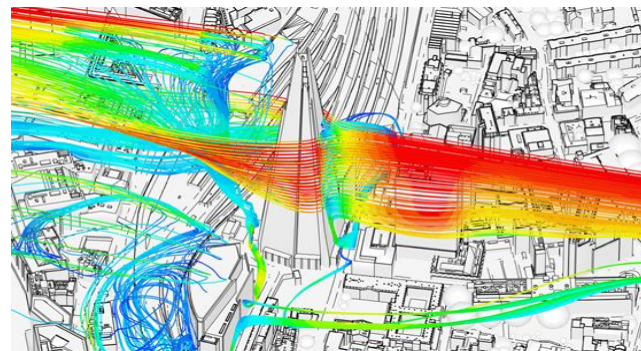
Multiphase



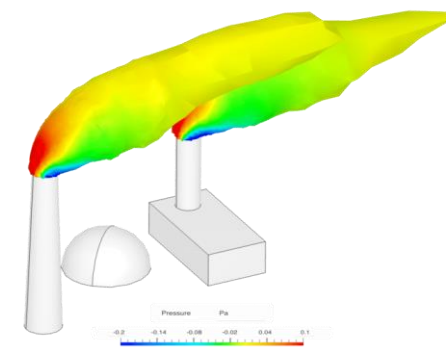
Electronics Thermal Management



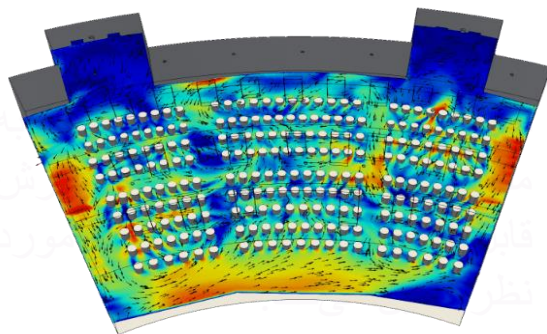
Valve & Flow Control



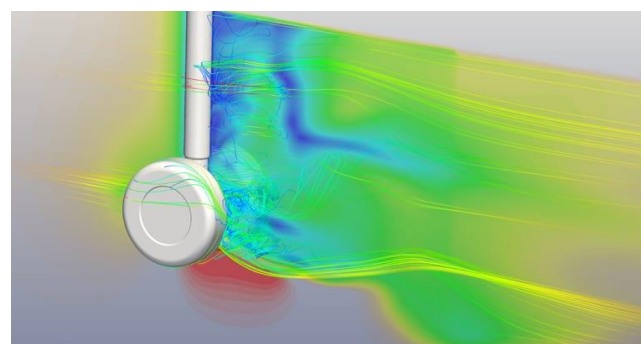
Urban Microclimate



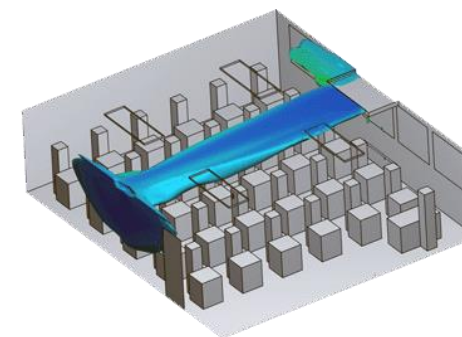
Pollution source



Indoor Environment



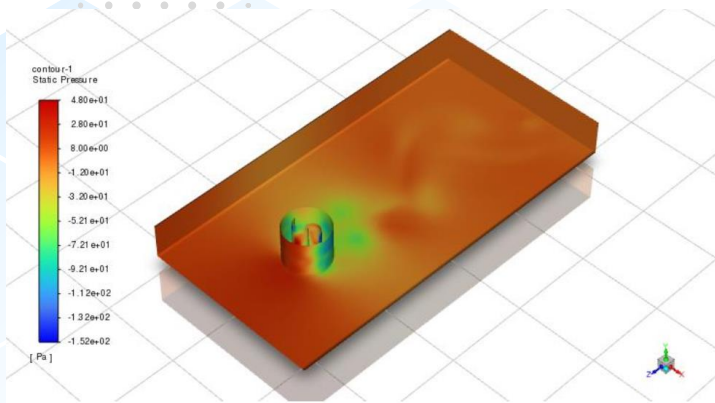
Landing gear



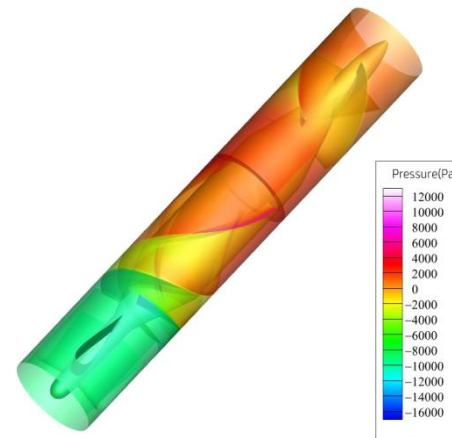
Typical Mechanical Ventilation



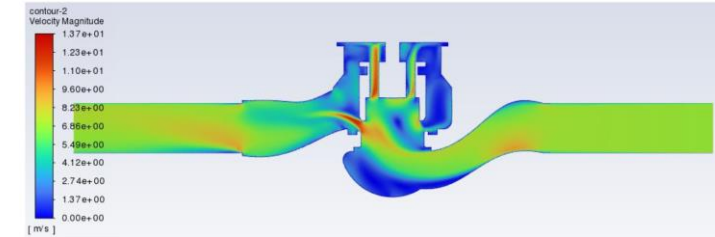
پروژه‌های انجام شده دانشجویان



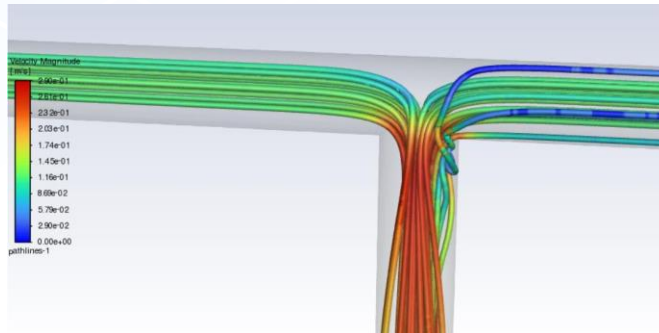
عبور جریان از توربین ساونیوس



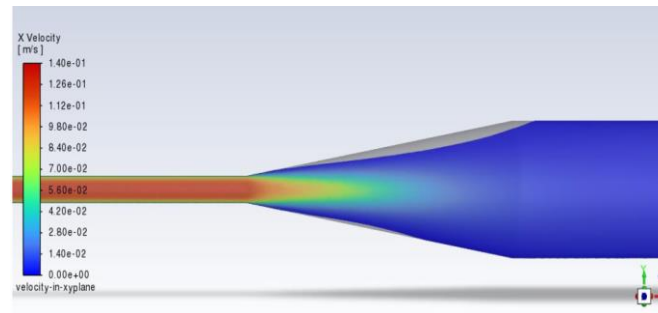
جریان درون پمپ



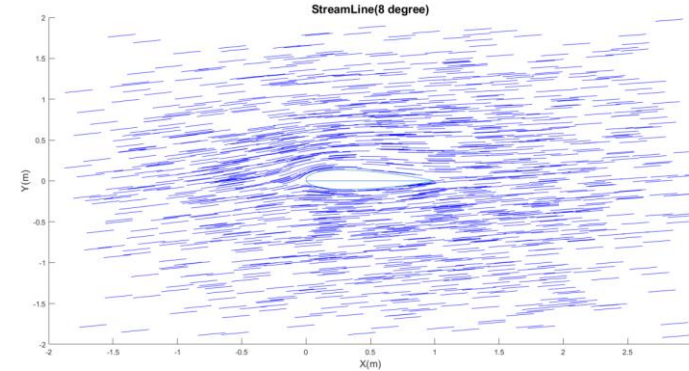
جریان درون شیر



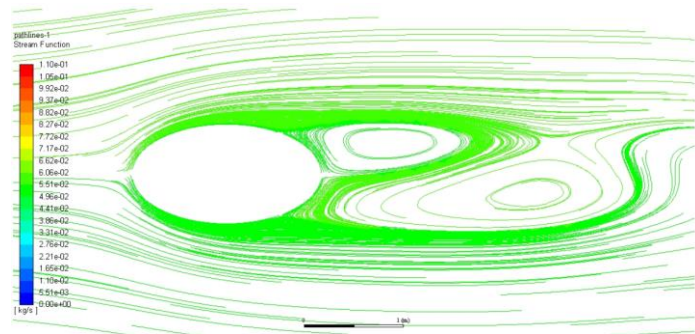
جریان درون Tee Junction



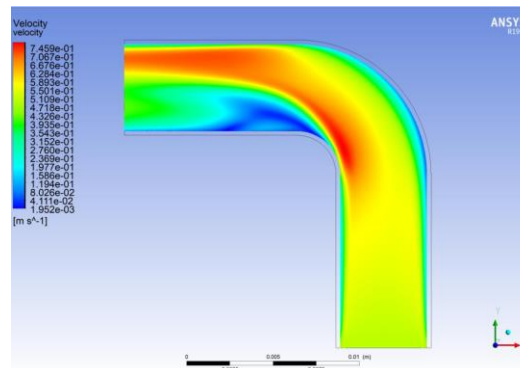
جریان درون Expansion مخروطی



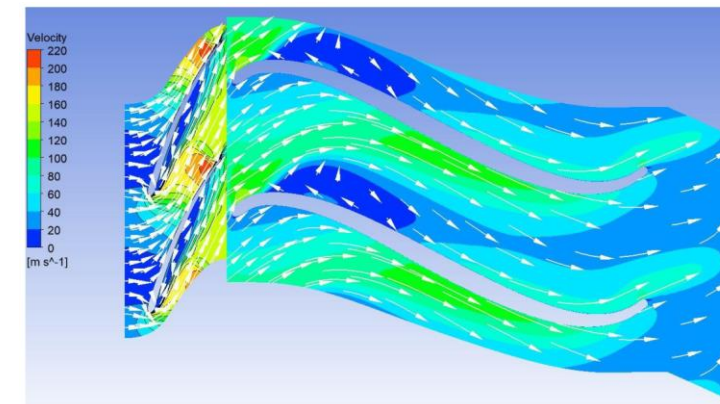
جریان حول ایرفویل



جریان حول استوانه با مقطع بیضوی



جریان درون Bend



جریان درون کمپرسور Centrifugal





نرم افزارهای حل جریان سیال

(Open-source)
تحقیقات و استفاده آکادمیک
هوافضا و خودرو
دریایی و نزدیک ساحل
کاربردهای زیست محیطی

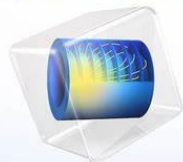
Open  FOAM

(جامع)
هوافضا و خودرو
خنک کننده الکترونیکی
کاربردهای زیست پزشکی

ANSYS[®]
FLUENT[®]

(فعل و انفعال فیزیک چندگانه)
مهندسی پزشکی
خنک کننده الکترونیکی
فرایند شیمیایی
کاربردهای انرژی
فعل و انفعال سازه و سیال

COMSOL
MULTIPHYSICS[®]



(حل کننده با کارایی بالا)
انرژی و تولید برق
کاربردهای زیست پزشکی

ANSYS[®]
CFX[®]

(رابط کاربر پسند)
خنک کننده الکترونیکی
ساختمان و سیستم های HVAC
فرآیندهای تولید

 **AUTODESK CFD**

(حل یکپارچه چندفیزیکی)
هوافضا و خودرو
انرژی
زیست پزشکی


STAR-CCM+[®]





کلاس آموزشی

۱. کاربردهای عملی CFD و مطالعات موردی

۲. اجزای پروژه و تحقیق

۳. آموزش عملی و استفاده از نرم افزار CFD

۴. مرکز پردازش سریع و شبیه سازی های مبتنی بر ابر

اهداف

- ✓ آشنایی با مبانی دینامیک سیالات محاسباتی
- ✓ شناسایی مزایا و معایب شبکه های سازمان یافته و سازمان نیافته
- ✓ مقایسه روش های مختلف گسسته سازی معادلات حاکم، پایداری و سرعت آنها
- ✓ کسب مهارت استفاده آگاهانه از نرم افزارهای تجاری
- ✓ آشنایی با روند تعریف مسئله و کسب مهارت مدلسازی
- ✓ کسب مهارت ژورنال نویسی

۱	آشنایی با دینامیک سیالات محاسباتی	
۲	شبکه بندی و گسسته سازی	
۳	روش های حل عددی (FDM, FVM, FEM)	
۴	معادلات مدل	
۵	حل جریان	
۶	مدلسازی آشفتگی	
۷	کار با نرم افزار	





طرح کلی درس

جلسات

- ☐ جلسات آموزشی: شنبه - دوشنبه ساعت ۱۵-۱۳:۳۰
- ☐ جلسات تمرین و بحث: چهارشنبه ساعت ۹-۱۰
- ☐ حضور در دو کلاس است.
- ☐ جلسات آموزشی هر هفته برگزار نمی‌شوند.

پروژه‌ها

- ☐ پروژه نهایی یک پروژه کامل CFD شامل تعریف مسئله تا بحث حول نتایج است.
- ☐ تعریف پروژه یا انتخاب پروژه پیشنهادی
- ☐ در لحظه آخر شروع به انجام پروژه نکنید!

ارزیابی

تمرین‌ها

۱۰ درصد

پروژه‌ها

۵۰ درصد

آزمون‌ها

۴۰ درصد

پیش‌نیازها

- ☐ محاسبات عددی
- ☐ مکانیک سیالات
- ☐ نرم‌افزار فلوئنت، زبان پایتون (مقدماتی)

سایت کلاس

www.spc.mech.sharif.ir

دستیاران آموزشی

❑ (مهندس علیرضا اکبری)

ar.akbari@mech.sharif.edu

❑ (محمدرضا اکبری)

mohammadrezaakbari1232@gmail.com

❑ (امین انجم روز)

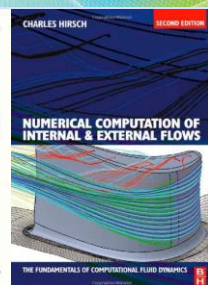
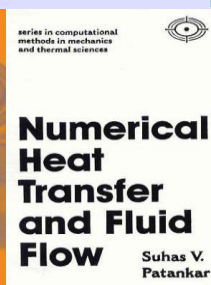
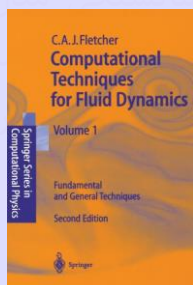
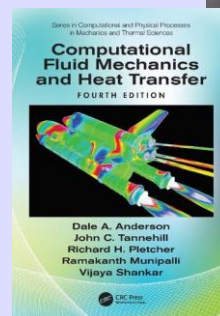
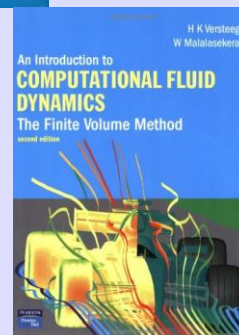
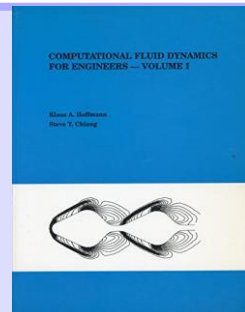
anjomrouz@mech.sharif.edu

❑ (احسان قادری)

ایمیل: eghaderi@mech.sharif.edu

مراجع

- ❖ Computational Fluid Dynamics for Engineers, Klaus A. Hoffman, 2000.
- ❖ An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Versteeg, 2007.
- ❖ Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, John C. Tannehill, Dale A. Anderson and Richard H. Pletcher, 2020.
- ❖ Numerical Computation of Internal and External Flows, Charls Hirsch, 2007.
- ❖ Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Suhas.V . Patunkar, 1980.
- ❖ Computational Techniques for Fluid Dynamics, C.A.J. Fletcher, 1996.



با توجه به هدف و تعریف مسئله و امکانات و زمان باید تصمیم گرفت
که کدام روش یا روش‌ها جهت تحقق اهداف مناسب است

تجربی

✓ قابل اعتماد (در صورت صحت آزمایش)

✓ عدم پیچیدگی تحلیل و محاسبه

✓ امکان بررسی مسائل پیچیده

✓ اندازه‌گیری مقدار واقعی مورد نظر (با عدم قطعیت)

✗ نیاز به تجهیزات بعضاً پیشرفته یا با اندازه نامتعارف

✗ اندازه‌گیری محدود و مقطعی در کنار سایر مشکلات اندازه‌گیری

✗ هزینه بالا

✗ در برخی موارد نیاز به زمان و انرژی غیر معمول

تحلیلی

✓ نتایج قابل اعتماد (در صورت وجود)

✓ نتایج جامع و کامل

✓ امکان تحلیل رفتار

✗ محدود به مسائل ساده و عموماً خطی

✗ نیاز به ساده‌سازی مسئله

✗ پیچیدگی روش حل

عددی

✓ امکان مدل‌سازی مسائل پیچیده

✓ نتایج جامع و کامل

✓ زمان و هزینه بسیار پایین‌تر از آزمایش

✓ امکان تحلیل شرایط ایده آل و تحلیل جامع غیر قطعی

✗ نیازمند صحت‌سنجی و اعتبارسنجی

✗ وجود خطای بریدگی و گرد کردن و گسسته‌سازی

✗ نیازمند ابزار محاسباتی

"نتایج تجربی برای همه قابل قبول است غیر از شخص آزمایش‌کننده در

حالی که همه نسبت به صحت نتایج عددی تردید دارند غیر از توسعه‌دهنده!"



Euler
(1707-1783)
Equations of Motion



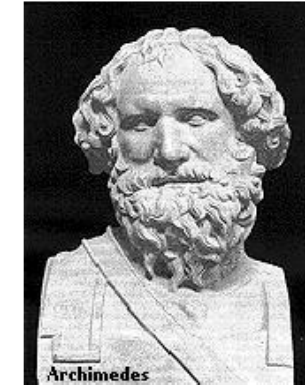
Bernoulli
(1667-1748)
Bernoulli's Principle



Leibniz
(1646-1716)
Kinetic Energy Concepts



Newton
(1642-1727)
Law of Viscosity



Archimedes
(C. 287-212 BC)
Buoyancy

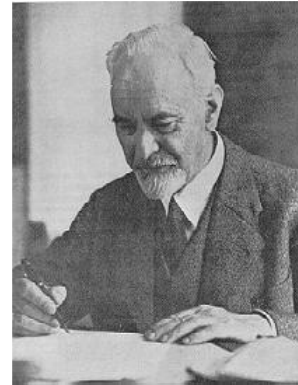


Kolmogorov
(1903-1987)

Theory of Turbulence
دانشگاه صنعتی شریف



Taylor
(1886-1975)
Taylor-Couette Flow



Prandtl
(1875-1953)
Prandtl Number



Reynolds
(1842-1912)
Reynolds Number



Stokes
(1819-1903)

Navier-Stokes Equation



Navier
(1785-1836)

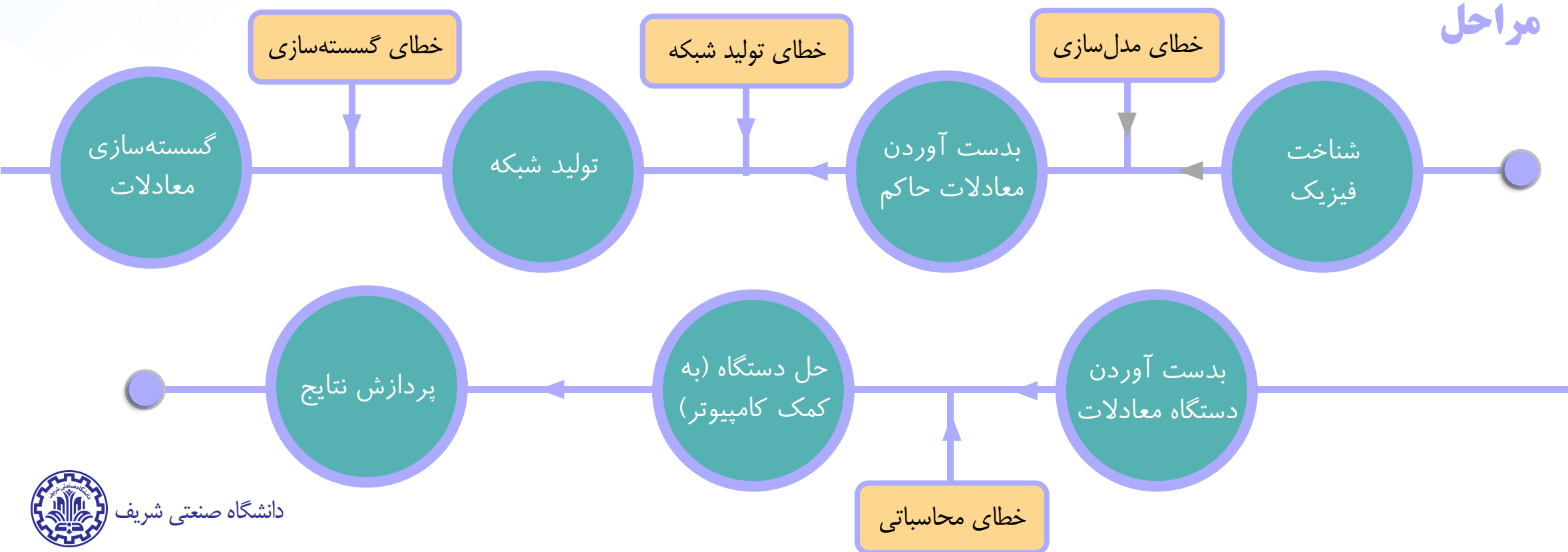


تعریف

دینامیک سیالات محاسباتی

دانش تحلیل سیستم درگیر با جریان سیال، انتقال حرارت و پدیده‌های مرتبط همچون راکتورهای شیمیایی با شبیه‌سازی‌های بر پایه محاسبات.

مراحل





تاریخ CFD

- ✓ به طور گسترده در صنایع فراتر از هوافضا، از جمله خودروسازی، پردازش شیمیایی، انرژی و مهندسی دریایی استفاده می شود.
- ✓ توسعه مدل های آشفتگی، مانند مدل $k - \epsilon$

گسترش برنامه های کاربردی

- ❖ در دسترس بودن رایانه های قدرتمندتر به محققان این امکان را داد تا با مسائل بزرگ تر و پیچیده تر مقابله کنند.
- ❖ روش حجم محدود به یکی از پرکاربردترین رویکردها برای حل مسائل جریان سیال تبدیل شد.

رشد

- ❑ روش های عددی در دهه ۱۹۵۰ شروع به ظهور کردند. اولین کاربرد دینامیک سیالات عددی در **آیرودینامیک** بود، به ویژه در حل معادلات ناویر-استوکس برای طراحی هواپیما.
- ❑ مسائل ساده با استفاده از روش های عددی پایه حل شدند

تولد

1950s

1960s

1970s

1980s

1990s

2000s

ظهور کامپیوتر در مکانیک سیالات

- توسعه روش تفاضل محدود و روش اجزای محدود
- در سال ۱۹۶۱، جان فون نیومان و همکارش روی شبیه سازی های رایانه ای اولیه برای بمب هیدروژنی و تحقیقات هسته ای مرتبط کار کردند.
- شروع به استفاده از این روش های عددی توسط محققان برای مسائل آیرودینامیکی کردند.

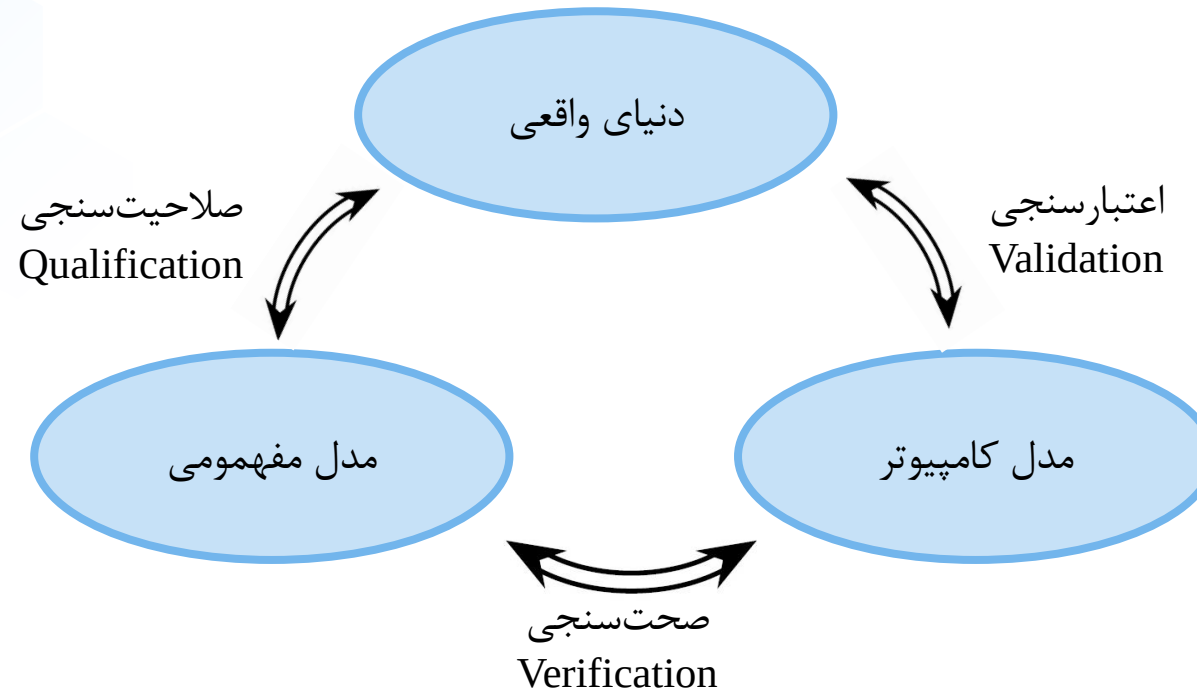
تجاری سازی و توسعه نرم افزار

- ❖ برای بهبود طراحی هواپیماها و فضاپیماها توسط شرکت های **NASA** و **Lockheed Martin**
- ❖ تأسیس شرکت ANSYS در سال ۱۹۸۷

HPC و چندرشته ای

- بهبود مستمر در سخت افزار محاسباتی، محاسبات موازی، و مدل های آشفتگی پیچیده تر
- نقش اساسی تقریباً در تمام زمینه های مهندسی
- ظهور روش های شبیه سازی گردابی بزرگ (LES) و شبیه سازی عددی مستقیم (DNS) به عنوان تکنیک های قدرتمند برای شبیه سازی





صلاحیت‌سنجی

شایستگی مدل مفهومی را به منظور ارائه سطح سازش قابل‌قبولی برای کاربردهای مورد نظر تعیین می‌کند.

صحت‌سنجی

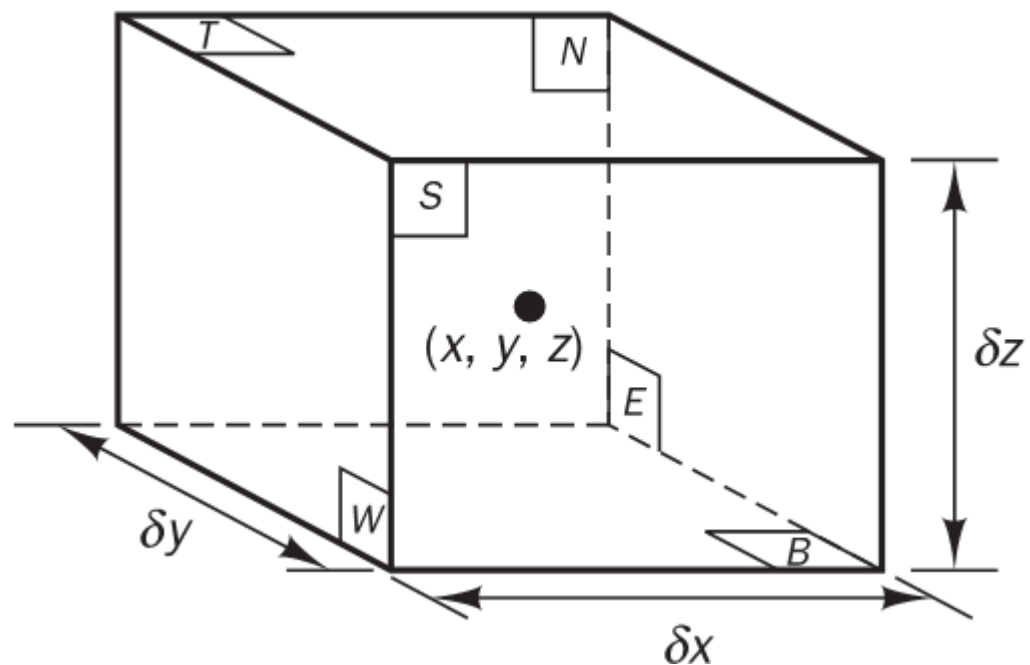
فرایندی که پیاده‌سازی دقیق مدل مفهومی و دقت جواب مسئله را مشخص می‌کند.

اعتبارسنجی

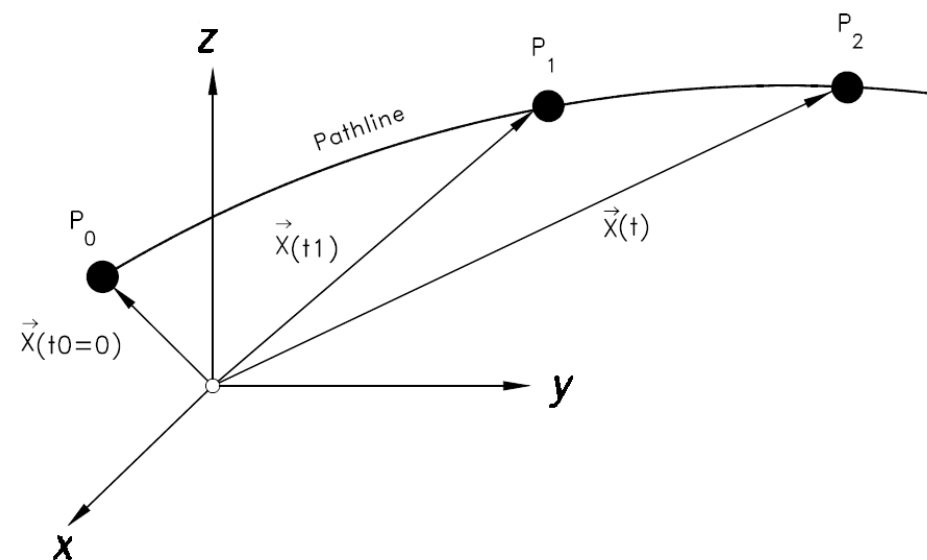
فرایندی که دقت مدل کامپیوتر را نسبت به واقعیت از منظر کاربردهای مورد نظر تعیین می‌کند.

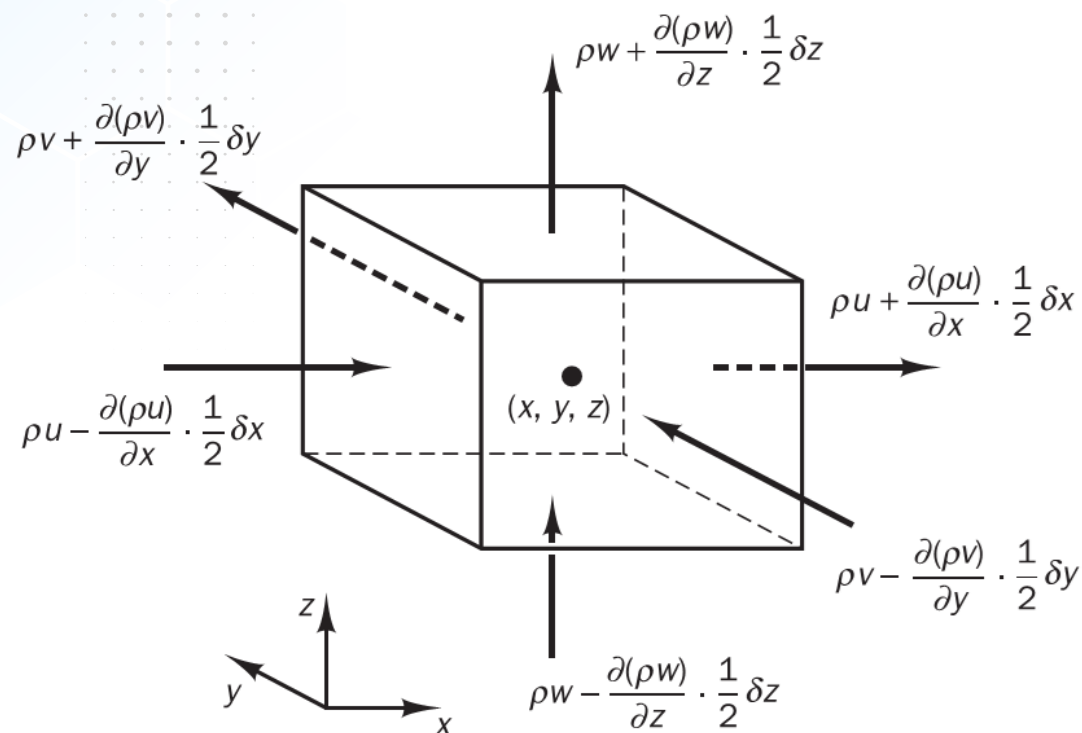


المان سیال



ذره سیال



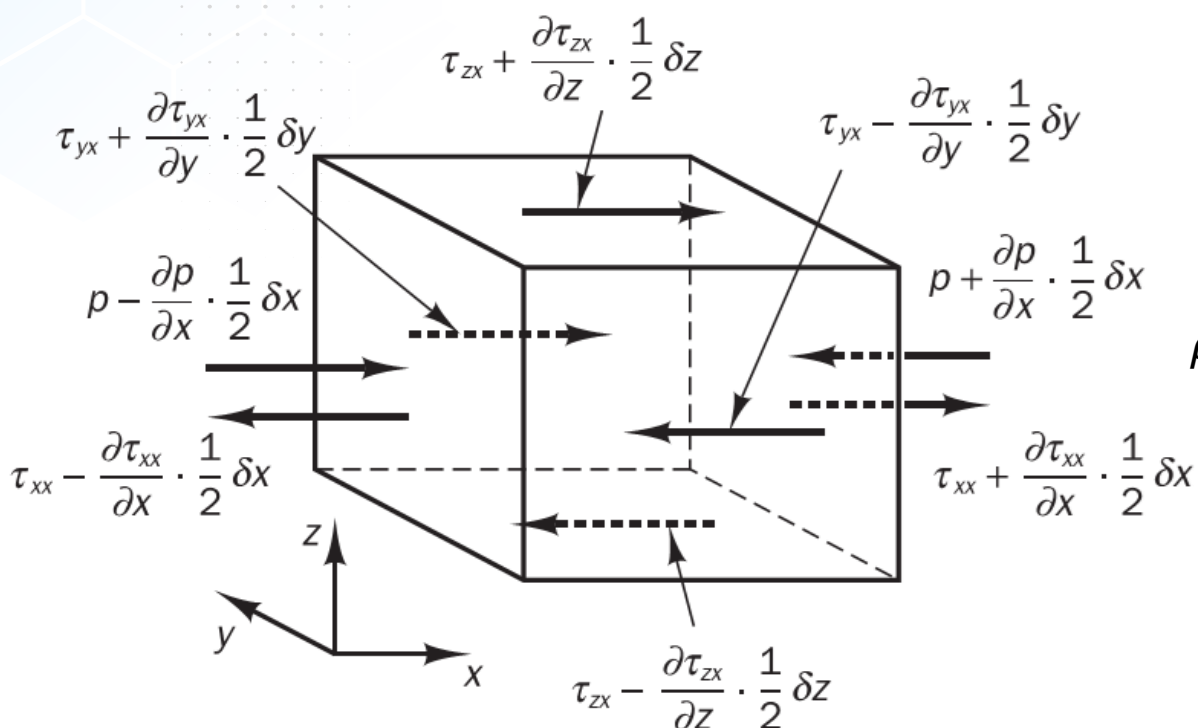


نرخ افزایش جرم = نرخ خالص جریان جرم
در المان سیال ورودی به المان سیال

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

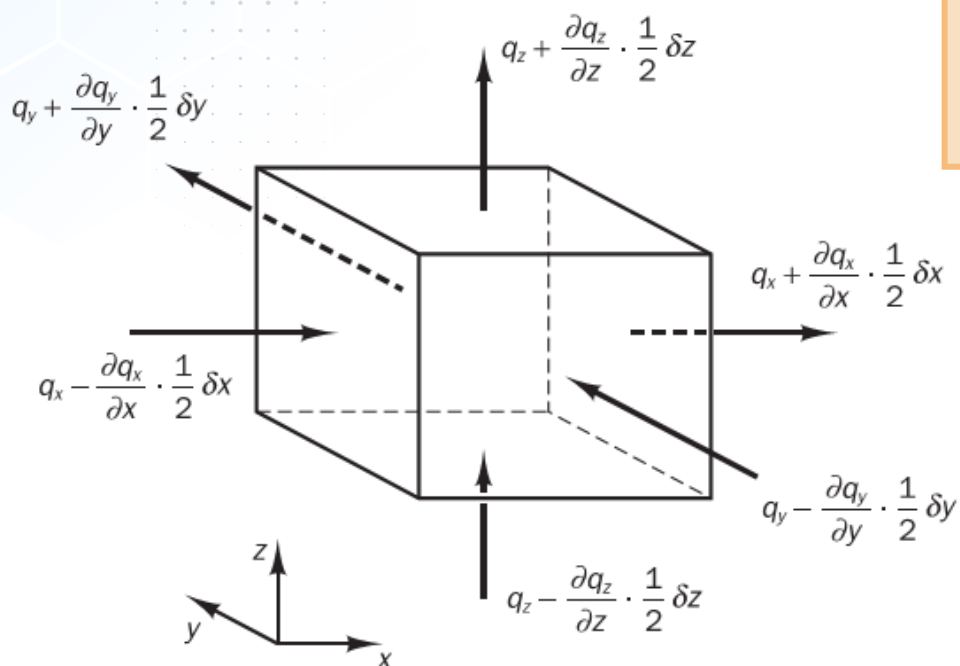
نرخ افزایش مومنتوم
= برآیند نیروهای وارده
به ذره سیال



$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{Mx}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{zx})}{\partial z} + S_{Mx}$$

نرخ افزایش انرژی = نرخ خالص حرارت + نرخ خالص کار انجام شده روی ذره سیال



$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \Phi + S_i$$

پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

x-مومنتوم

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx}$$

y-مومنتوم

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My}$$

z-مومنتوم

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{Mz}$$

انرژی

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \text{div}(\rho i \mathbf{u}) = -p \text{div } \mathbf{u} + \text{div}(k \text{grad } T) + \Phi + S_i$$

معادله حالت

$$p = p(\rho, T) \text{ and } i = i(\rho, T)$$

گاز کامل

$$p = \rho R T \text{ and } i = C_v T$$

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\text{div } \mathbf{u})^2$$

تابع اتلاف برگشت ناپذیر



$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

نرخ افزایش آن کمیت + نرخ افزایش آن کمیت = نرخ خالص جریان خروجی + نرخ افزایش یک کمیت
 ناشی از چشمه ناشی از پخش آن کمیت از المان در المان سیال

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

$$\int_{CV} \text{div}(\mathbf{a}) dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho\phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dA \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} \rho\phi dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dA dt \\ &= \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{CV} S_\phi dV dt \end{aligned}$$



معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلات خطی

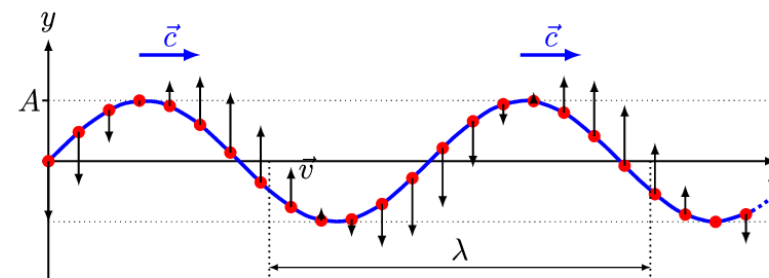
معادلات دیفرانسیل

- ✓ خطی: حاصلضرب تابع و مشتقات آن را نداریم
استفاده از برهم‌نهی ←
- ✓ غیر خطی: $f^2, ff', f'f', \dots$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sin(\pi x) + \cos(\pi x)$$

$$\phi(x, 0) = \cos(\pi x)$$

$$\phi(0, t) = 1$$



$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \checkmark \quad \text{معادله خطی درجه یک موج}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \checkmark \quad \text{معادله برگرد}$$

طبقه‌بندی معادلات مشتق جزئی

انگیزه طبقه‌بندی

- ✓ شناخت رفتار طبیعی سیستم
- ✓ انتخاب روش حل معادله

طبقه‌بندی فیزیکی

- ✓ تعادل: مانند پخش حرارتی پایا
- ✓ انتشار با استهلاك: مانند هدایت حرارتی گذرا یا لایه مرزی
- ✓ انتشار بدون استهلاك: مانند معادله موج

طبقه‌بندی ریاضی

- ✓ هذلولوی: مانند معادله موج

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$
- ✓ سهموی: مانند هدایت حرارتی گذرا

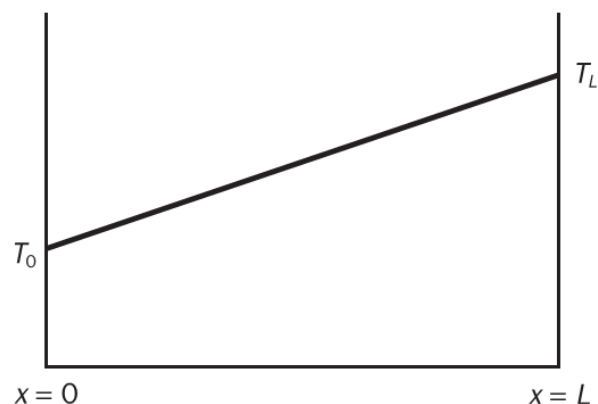
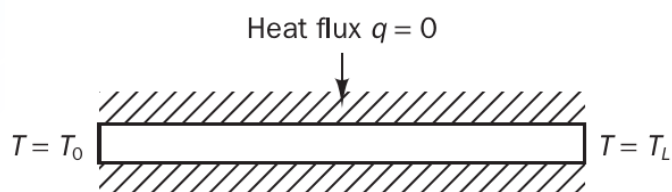
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$
- ✓ بیضوی: پخش حرارتی پایا

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$



طبقه‌بندی معادلات مشتق جزئی

معادلات تعادل



✓ شرایط حالت پایا

✓ میدان بسته

✓ شرایط مرزی

✓ مسائل مقدار مرزی

✓ یک اغتشاش داخل حل، در تمامی جهات حرکت کرده و حل را

در هر جایی می‌تواند تغییر می‌دهد

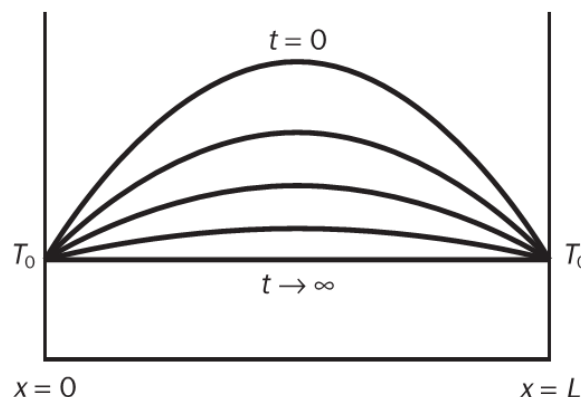
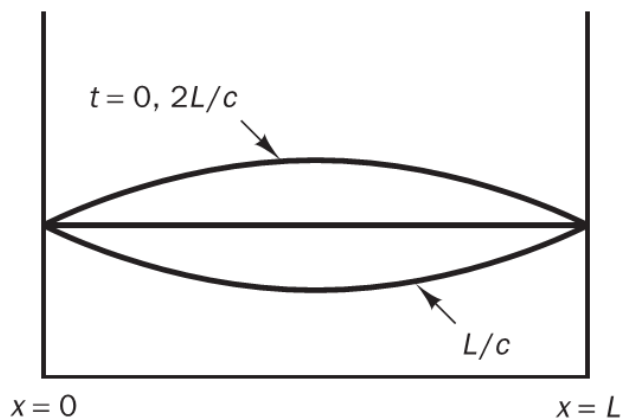
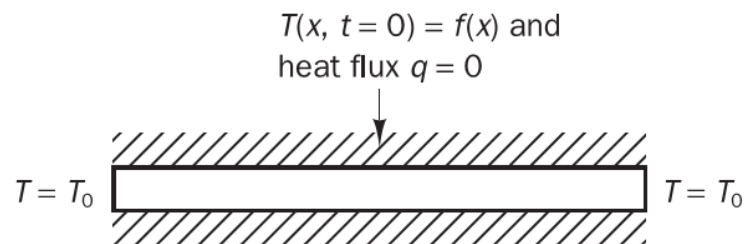
✓ رویکردهای عددی باید اجازه دهند که هر نقطه تحت تاثیر

همسایه قرار گیرد.



طبقه‌بندی معادلات مشتق جزئی

معادلات انتشار



✓ انتقال حرارت گذرا و لایه مرزی

✓ میدان باز

✓ شرایط مرزی و اولیه

✓ مسائل مقدار اولیه

✓ یک اغتشاش داخل حل، فقط حل را در

زمان‌های بعدی تغییر می‌دهد

طبقه‌بندی معادلات مشتق جزئی

طبقه‌بندی ریاضی

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0 \quad a, b, c, d, e, f, g = \text{func}(x, y) \quad \text{معادله مشتق جزئی مرتبه ۲}$$

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = 0 \quad \text{معادله مشخصه}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ریشه‌ها}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{طبقه‌بندی بر اساس}$$

❖ روش مشخصه: تبدیل PDE به ODE

❖ منحنی مشخصه:

✓ مشتقات مرتبه ۲ ناپیوسته (بدست آوردن معادله مشخصه).

✓ مشتقات مرتبه ۱ پیوسته.



طبقه‌بندی معادلات مشتق جزئی

طبقه‌بندی ریاضی

منحنی‌های مشخصه مرزها دو ناحیه مهم را

تعیین می‌کند:

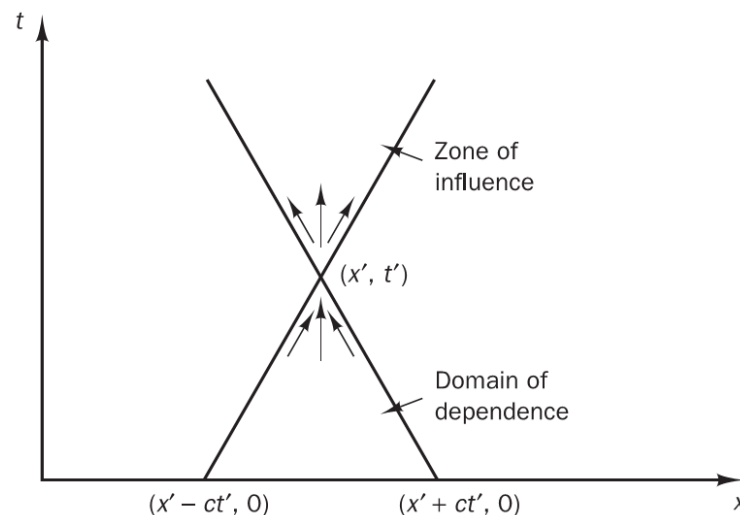
✓ ناحیه تاثیر

✓ ناحیه وابستگی

$\Delta > 0$ ۲ ریشه حقیقی وجود دارد معادله **هذلولی** است و دو منحنی مشخصه داریم

$\Delta = 0$ ۱ ریشه حقیقی وجود دارد معادله **سه‌موی** است و یک منحنی مشخصه داریم

$\Delta < 0$ ریشه حقیقی وجود ندارد معادله **بیضوی** است و منحنی مشخصه نداریم



پاسخ معادله دیفرانسیل

تعریف هادامارد (Hadamard)

خوش وضع

✓ جواب وجود دارد.

✓ جواب یکتا است.

✓ پاسخ به صورت پیوسته با تغییر شرایط مرزی و اولیه تغییر می کند.

برای حل معادلات دیفرانسیل به روش تحلیلی یا عددی معادله باید خوش وضع باشد.



معادلات بیضوی

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

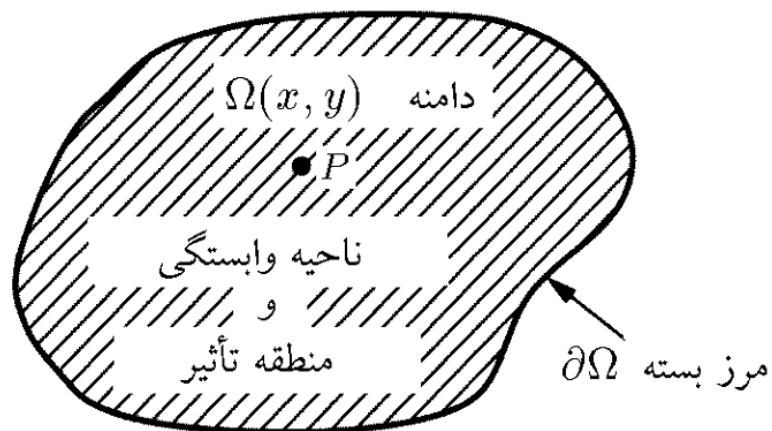
معادله لاپلاس (همگن)

(هدایت بدون چشمه با تابع پتاسیل)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y)$$

معادله پوآسون

ناحیه تاثیر و ناحیه وابستگی تمام میدان حل است.



خوش وضع

✓ در یک دامنه بسته.

✓ شرط مرزی در مرز دامنه باید مشخص باشد (یا مقدار تابع یا گرادیان

(غیر از حداقل یک نقطه).

معادلات سهموی

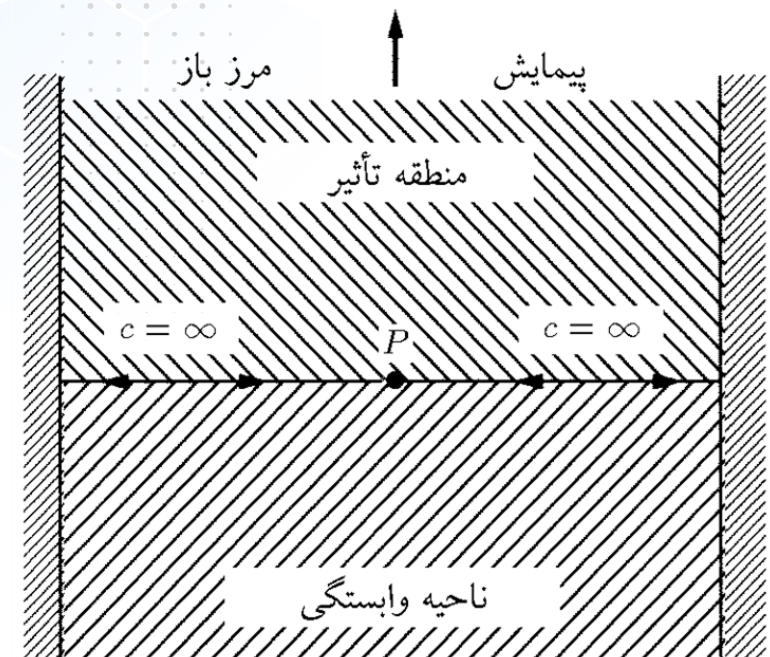
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

معادله انتقال حرارت یک

بعدی غیر دائم

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

منحنی مشخصه

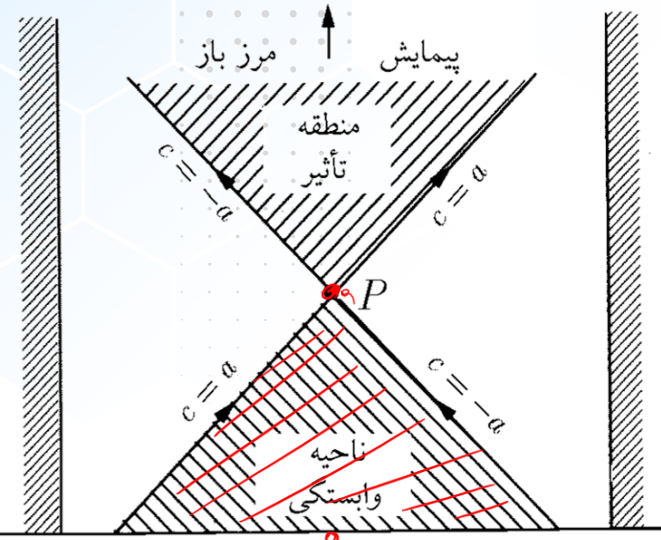


خوش وضع

✓ شرایط مرزی (روی مقدار تابع یا گرادیان آن).

✓ یک شرط اولیه (فقط روی خود تابع نه گرادیان).

معادلات هذلولوی



$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \phi(x, 0) = f(x) \quad \text{شرایط اولیه}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \text{معادله موج}$$

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) dx \quad \text{حل دقیق}$$

$$\Delta = 4c^2 > 0 \quad \text{معادله هذلولوی}$$

$$\frac{dt}{dx} = \pm \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x - ct = c_1 \\ x + ct = c_2 \end{cases} \quad \text{خطوط مشخصه}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} = -c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

خوش وضع

✓ شرایط مرزی (روی مقدار تابع یا گرادیان آن).

✓ دو شرط اولیه (فقط روی خود تابع و گرادیان).



معادله حاکم بر جریان

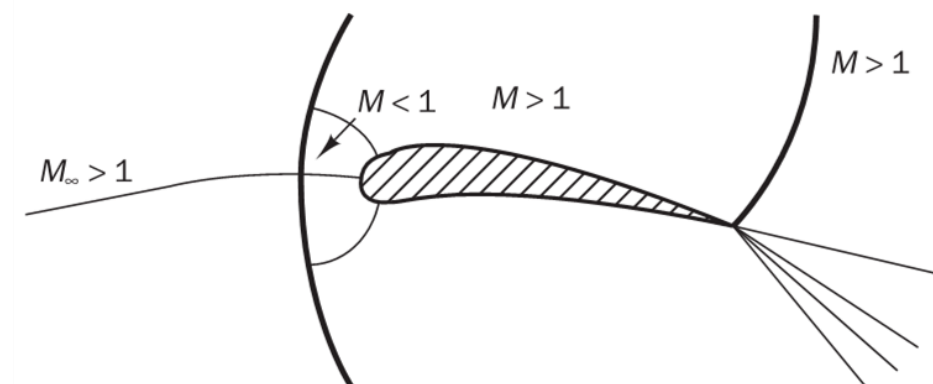
جریان پتانسیل برای غیر لزج غیر چرخشی، تراکم‌ناپذیر

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

جریان پتانسیل برای غیر لزج غیر چرخشی، تراکم‌پذیر

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta = -4(1 - M^2) \quad \begin{cases} M < 1, \Delta < 0 \\ M = 1, \Delta = 0 \\ M > 1, \Delta > 0 \end{cases}$$



جریان	دائمی	غیر دائمی
لزج	بیضوی	سهموی
غیر لزج	فروصوت بیضوی فراصوت هذلولی	هذلولوی
لایه برشی نازک	سهموی	سهموی

خسته نباشید
